

# Des tuyaux pour se qualifier au baseball

*Théophile Wallez*

Jeudi 15 Novembre 2018

Info



**Pour Tous**

# Introduction

# Les qualifications au Baseball

- ▶ 5 équipes par poule

# Les qualifications au Baseball

- ▶ 5 équipes par poule
- ▶ 19 matchs entre chaque paire d'équipe

# Les qualifications au Baseball

- ▶ 5 équipes par poule
- ▶ 19 matchs entre chaque paire d'équipe
- ▶ L'équipe qui a le plus de victoires dans la poule est qualifiée

# Élimination mathématique d'une équipe

TUESDAY, SEPTEMBER 10, 1996

San Francisco Chronicle

The Gate  
Sports Online  
► <http://www.sfgate.com>

## SPORTING GRE

# 49ers, Young Get Big Break



## Quarterback may have

By Gary Swan  
Chronicle Staff Writer

49ers Soak S.  
SEE PAGE 5

The bye week has come at a perfect time for the 49ers and quarterback Steve Young. If they had a game next Sunday, there's a good chance Young would not play.

last season — whi  
pounding and cos  
the problem has l  
to take a slow, pa  
ery.

# Giants Officially Leave the NL West Race

By Nancy Gay  
Chronicle Staff Writer

With the smack of another National League West bat 500 miles away, the Giants' run at the division title ended last night, just as they were handing the visiting St. Louis Cardinals an even bigger lead in the NL Central.

CARDINALS 6  
GIANTS 2

In San Diego, Greg Vaughn's three-run homer in the eighth pushed the Padres over the Pirates and officially shoved the rest of the Giants' season into the back-ground. On the heels of their tedious 6-2 loss before an announced crowd of 10,307 at Candlestick Park, the Giants fell 19½ games off the lead.

As it is, the worst the Padres' (80-85) can finish is 80-82. The Giants have fallen to 59-83 with 20

Financing in Place  
For Giants' New Stadium  
SEE PAGE B1, MAIN NEWS

games left; they cannot win 80 games. Coming off a miserable 2-8 mark on a three-city road trip that saw their road record drop to 27-47, the Giants were hoping to get off on the right foot in their longest homestand of the year (15 games, 14 days).

"Where we are, you're going to be eliminated sooner or later," Baker said quietly. "But it doesn't alter the fact that we've still got to play ball. You've still got to play hard, the fans come out to watch you play. You've got to play for the fact of loving to play, no matter where you are in the standings.

"You've got to play the role of spoiler, to not make it easier on  
GIANTS: Page D5 Col 3

1996  
2000  
2004  
2008  
2012  
2016  
2020  
2024  
2028  
2032  
2036  
2040  
2044  
2048  
2052  
2056  
2060  
2064  
2068  
2072  
2076  
2080  
2084  
2088  
2092  
2096  
2100  
2104  
2108  
2112  
2116  
2120  
2124  
2128  
2132  
2136  
2140  
2144  
2148  
2152  
2156  
2160  
2164  
2168  
2172  
2176  
2180  
2184  
2188  
2192  
2196  
2200  
2204  
2208  
2212  
2216  
2220  
2224  
2228  
2232  
2236  
2240  
2244  
2248  
2252  
2256  
2260  
2264  
2268  
2272  
2276  
2280  
2284  
2288  
2292  
2296  
2300  
2304  
2308  
2312  
2316  
2320  
2324  
2328  
2332  
2336  
2340  
2344  
2348  
2352  
2356  
2360  
2364  
2368  
2372  
2376  
2380  
2384  
2388  
2392  
2396  
2400  
2404  
2408  
2412  
2416  
2420  
2424  
2428  
2432  
2436  
2440  
2444  
2448  
2452  
2456  
2460  
2464  
2468  
2472  
2476  
2480  
2484  
2488  
2492  
2496  
2500

# Le problème qu'on va résoudre dans cet exposé

À un instant donné durant les poules, est-ce que une équipe est éliminée mathématiquement ?



# Sommaire

**Prise en main du problème**

Résolution naïve du problème

Analyse mathématique du problème

Résolution du flot maximal

On enlève la contrainte des 5 équipes dans la poule, et des 19 matches

# Une seule équipe dans la poule

# Deux équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	3	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-	4
$e_2$	-	-

# Deux équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	3	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-	4
$e_2$	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

# Deux équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	3	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-	4
$e_2$	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

Oui : si  $e_1$  gagne tous ses matchs, le résultat est le suivant :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	7	6

# Deux équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	3	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-	2
$e_2$	-	-

# Deux équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	3	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-	2
$e_2$	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?



# Deux équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	3	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-	2
$e_2$	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

Non : même si  $e_1$  gagne tous ses matchs, le résultat est le suivant :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	5	6

# Deux équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	3	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-	3
$e_2$	-	-

# Deux équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	3	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-	3
$e_2$	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

# Deux équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	3	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$
$e_1$	-	3
$e_2$	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

Oui : si  $e_1$  gagne tous ses matchs, le résultat est le suivant :

Équipe	$e_1$	$e_2$
Matchs gagnés	6	6

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

En fait,  $e_1$  gagne dans tous les cas :  $e_2$  et  $e_3$  ont au plus 9 points :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	9	7

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	5	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-



# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	5	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	5	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

Oui : si  $e_1$  gagne tous ses matchs elle a 9 points, et  $e_2$  ou  $e_3$  peuvent en avoir seulement 7 :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	9	7	5

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	3	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	3	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

## Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	3	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

Oui : si  $e_1$  gagne tous ses matchs elle a 7 points, et  $e_2$  ou  $e_3$  peuvent en avoir seulement 7 :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	7	7	5

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	2	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	2	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	2	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

Oui : si  $e_1$  gagne tous ses matchs elle a 6 points,  $e_2$  et  $e_3$  gagnent chacune 1 match :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	6	6	6



# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	2	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	3
$e_3$	-	-	-

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	2	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	3
$e_3$	-	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

# Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	2	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	2	2
$e_2$	-	-	3
$e_3$	-	-	-

Est-ce que  $e_1$  peut encore gagner ?

Non : si  $e_1$  gagne tous ses matchs elle a 6 points,  $e_2$  ou  $e_3$  en auront au moins 7

## Trois équipes dans la poule

Nombre de matchs déjà gagnés par $e_2$ contre $e_3$	Nombre de victoires			Qui gagne
	$e_1$	$e_2$	$e_3$	
0	6	5	8	$e_3$
1	6	6	7	$e_3$
2	6	7	6	$e_2$
3	6	8	5	$e_2$

$e_1$  ne gagne dans aucun cas !

# Sommaire

Prise en main du problème

**Résolution naïve du problème**

Analyse mathématique du problème

Résolution du flot maximal

# Listons toutes les possibilités

Nombre de matchs gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	5	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	1
$e_2$	-	-	2
$e_3$	-	-	-

# Listons toutes les possibilités

Matches			Nombre de victoires			Qui gagne
$e_1$ vs $e_3$	$e_2$ vs $e_3$	$e_2$ vs $e_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	
$e_1$	$e_2$	$e_2$	6	7	5	$e_2$
$e_1$	$e_2$	$e_3$	6	6	6	$e_1, e_2, e_3$
$e_1$	$e_3$	$e_2$	6	6	6	$e_1, e_2, e_3$
$e_1$	$e_3$	$e_3$	6	5	7	$e_3$
$e_3$	$e_2$	$e_2$	5	7	6	$e_2$
$e_3$	$e_2$	$e_3$	5	6	7	$e_3$
$e_3$	$e_3$	$e_2$	5	6	7	$e_3$
$e_3$	$e_3$	$e_3$	5	5	8	$e_3$

$e_1$  a donc encore une chance de gagner !

# Listons toutes les possibilités

Nombre de lignes :  $2^{\text{nombre de matchs}}$



# Listons toutes les possibilités

Nombre de lignes :  $2^{\text{nombre de matchs}}$

Nombre de matchs :  $\leq 190$

# Listons toutes les possibilités

Nombre de lignes :  $2^{\text{nombre de matchs}}$

Nombre de matchs :  $\leq 190$

Nombre de ligne qu'on peut vérifier par seconde  $\ll 10^9$

# Listons toutes les possibilités

Nombre de lignes :  $2^{\text{nombre de matchs}}$

Nombre de matchs :  $\leq 190$

Nombre de ligne qu'on peut vérifier par seconde  $\ll 10^9$

$\Rightarrow$  Temps pris par l'algorithme :  $2^{190}/10^9 \approx 10^{48}$  secondes

# Listons toutes les possibilités

Nombre de lignes :  $2^{\text{nombre de matchs}}$

Nombre de matchs :  $\leq 190$

Nombre de ligne qu'on peut vérifier par seconde  $\ll 10^9$

$\Rightarrow$  Temps pris par l'algorithme :  $2^{190}/10^9 \approx 10^{48}$  secondes

Âge de l'univers  $\approx 10^{17}$  secondes

# Listons toutes les possibilités

Nombre de lignes :  $2^{\text{nombre de matchs}}$

Nombre de matchs :  $\leq 190$

Nombre de ligne qu'on peut vérifier par seconde  $\ll 10^9$

$\Rightarrow$  Temps pris par l'algorithme :  $2^{190}/10^9 \approx 10^{48}$  secondes

Âge de l'univers  $\approx 10^{17}$  secondes

C'est trop lent 😞

# Listons toutes les possibilités

Nombre de lignes :  $2^{\text{nombre de matchs}}$

Nombre de matchs :  $\leq 190$

Nombre de ligne qu'on peut vérifier par seconde  $\ll 10^9$

$\Rightarrow$  Temps pris par l'algorithme :  $2^{190}/10^9 \approx 10^{48}$  secondes

Âge de l'univers  $\approx 10^{17}$  secondes

C'est trop lent 😞

Optimisation : Il y a des lignes redondantes !

# Listons toutes les possibilités un peu plus intelligemment

Matches			Nombre de victoires			Qui gagne
$e_1$ vs $e_3$	$e_2$ vs $e_3$	$e_2$ vs $e_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	
$e_1$	$e_2$	$e_2$	6	7	5	$e_2$
$e_1$	$e_2$	$e_3$	6	6	6	$e_1, e_2, e_3$
$e_1$	$e_3$	$e_2$	6	6	6	$e_1, e_2, e_3$
$e_1$	$e_3$	$e_3$	6	5	7	$e_3$
$e_3$	$e_2$	$e_2$	5	7	6	$e_2$
$e_3$	$e_2$	$e_3$	5	6	7	$e_3$
$e_3$	$e_3$	$e_2$	5	6	7	$e_3$
$e_3$	$e_3$	$e_3$	5	5	8	$e_3$

# Listons toutes les possibilités un peu plus intelligemment

Nombre de matchs gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	5	5	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	1
$e_2$	-	-	4
$e_3$	-	-	-



# Listons toutes les possibilités un peu plus intelligemment

Matches		Nombre de victoires			Qui gagne
$e_1$ vs $e_3$	$e_2$ vs $e_3$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	
0-1	0-4	5	5	10	$e_3$
0-1	1-3	5	6	9	$e_3$
0-1	2-2	5	7	8	$e_3$
0-1	3-1	5	8	7	$e_2$
0-1	4-0	5	9	6	$e_2$
1-0	0-4	6	5	9	$e_3$
1-0	1-3	6	6	8	$e_3$
1-0	2-2	6	7	7	$e_2, e_3$
1-0	3-1	6	8	6	$e_2$
1-0	4-0	6	9	5	$e_2$

$e_1$  est éliminée mathématiquement

# Listons toutes les possibilités un peu plus intelligemment

Nombre de lignes :

# Listons toutes les possibilités un peu plus intelligemment

Nombre de lignes : la multiplication de  $(1 + \text{nombre de matchs entre } e_i \text{ et } e_j)$  pour chaque paire d'équipe

# Listons toutes les possibilités un peu plus intelligemment

Nombre de lignes : la multiplication de  $(1 + \text{nombre de matchs entre } e_i \text{ et } e_j)$  pour chaque paire d'équipe

$1 + \text{Nombre de matchs entre } e_i \text{ et } e_j \leq 20$

# Listons toutes les possibilités un peu plus intelligemment

Nombre de lignes : la multiplication de  $(1 + \text{nombre de matchs entre } e_i \text{ et } e_j)$  pour chaque paire d'équipe

$1 + \text{Nombre de matchs entre } e_i \text{ et } e_j \leq 20$

Nombre de paire d'équipe  $\leq 10$

# Listons toutes les possibilités un peu plus intelligemment

Nombre de lignes : la multiplication de (1 + nombre de matchs entre  $e_i$  et  $e_j$ ) pour chaque paire d'équipe

1 + Nombre de matchs entre  $e_i$  et  $e_j \leq 20$

Nombre de paire d'équipe  $\leq 10$

$\Rightarrow$  Nombre de lignes :  $20^{10}$

Nombre de lignes qu'on peut vérifier par seconde  $\ll 10^9$

$\Rightarrow$  Temps pris par l'algorithme :  $20^{10}/10^9 \approx 10^5$  secondes  
(environ 3h)

# Listons toutes les possibilités un peu plus intelligemment

Nombre de lignes : la multiplication de (1 + nombre de matchs entre  $e_i$  et  $e_j$ ) pour chaque paire d'équipe

1 + Nombre de matchs entre  $e_i$  et  $e_j \leq 20$

Nombre de paire d'équipe  $\leq 10$

$\Rightarrow$  Nombre de lignes :  $20^{10}$

Nombre de lignes qu'on peut vérifier par seconde  $\ll 10^9$

$\Rightarrow$  Temps pris par l'algorithme :  $20^{10}/10^9 \approx 10^5$  secondes  
(environ 3h)

C'est très lent, mais plus réaliste.

# Sommaire

Prise en main du problème

Résolution naïve du problème

**Analyse mathématique du problème**

Résolution du flot maximal



## On peut supposer que $e_1$ n'a plus de matchs à jouer

Si,  $e_1$  a encore une chance de gagner, alors  $e_1$  a encore une chance de gagner si elle gagne tous ses matchs.

# Mise en équation du problème

## Mise en équation du problème : pourquoi

« La somme des prix de ce que j'achète dans un magasin est égal aux prix que je paye à la caisse »

## Mise en équation du problème : pourquoi

« La somme des prix de ce que j'achète dans un magasin est égal aux prix que je paye à la caisse »

Quantités qu'on manipule :

## Mise en équation du problème : pourquoi

« La somme des prix de ce que j'achète dans un magasin est égal aux prix que je paye à la caisse »

Quantités qu'on manipule :

- ▶  $n$  : nombre d'objets que j'achète dans le magasin

## Mise en équation du problème : pourquoi

« La somme des prix de ce que j'achète dans un magasin est égal aux prix que je paye à la caisse »

Quantités qu'on manipule :

- ▶  $n$  : nombre d'objets que j'achète dans le magasin
- ▶  $p_1, p_2, \dots, p_n$  : prix des objets que j'achète

## Mise en équation du problème : pourquoi

« La somme des prix de ce que j'achète dans un magasin est égal aux prix que je paye à la caisse »

Quantités qu'on manipule :

- ▶  $n$  : nombre d'objets que j'achète dans le magasin
- ▶  $p_1, p_2, \dots, p_n$  : prix des objets que j'achète
- ▶  $p$  : prix total payé à la caisse

## Mise en équation du problème : pourquoi

« La somme des prix de ce que j'achète dans un magasin est égal aux prix que je paye à la caisse »

Quantités qu'on manipule :

- ▶  $n$  : nombre d'objets que j'achète dans le magasin
- ▶  $p_1, p_2, \dots, p_n$  : prix des objets que j'achète
- ▶  $p$  : prix total payé à la caisse

L'équation : «  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$  »



# Les variables qui décrivent le problème

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés				

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$				
$e_2$				
$e_3$				
$e_4$				

# Les variables qui décrivent le problème

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$				
$e_2$				
$e_3$				
$e_4$				

# Les variables qui décrivent le problème

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

- ▶  $m_{i,j}$  : nombre de matchs restants entre  $e_i$  et  $e_j$

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$
$e_2$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$
$e_3$	$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$	$m_{3,4}$
$e_4$	$m_{4,1}$	$m_{4,2}$	$m_{4,3}$	$m_{4,4}$

# Les variables qui décrivent le problème

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

Que dire de  $m_{i,j}$  et  $m_{j,i}$  ?

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$
$e_2$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$
$e_3$	$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$	$m_{3,4}$
$e_4$	$m_{4,1}$	$m_{4,2}$	$m_{4,3}$	$m_{4,4}$

# Les variables qui décrivent le problème

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

Que dire de  $m_{i,j}$  et  $m_{j,i}$  ?

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$
$e_2$	$m_{2,1}$	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$
$e_3$	$m_{3,1}$	$m_{3,2}$	$m_{3,3}$	$m_{3,4}$
$e_4$	$m_{4,1}$	$m_{4,2}$	$m_{4,3}$	$m_{4,4}$

On a  $m_{i,j} = m_{j,i}$  !

# Les variables qui décrivent le problème

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

Que dire de  $m_{i,j}$  et  $m_{j,i}$  ?

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$
$e_2$	-	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$
$e_3$	-	-	$m_{3,3}$	$m_{3,4}$
$e_4$	-	-	-	$m_{4,4}$

On a  $m_{i,j} = m_{j,i}$  !

# Les variables qui décrivent le problème

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

Que dire de  $m_{i,j}$  ?

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$
$e_2$	-	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$
$e_3$	-	-	$m_{3,3}$	$m_{3,4}$
$e_4$	-	-	-	$m_{4,4}$

# Les variables qui décrivent le problème

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

Que dire de  $m_{i,j}$  ?

On a  $m_{i,j} = 0$  !

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	$m_{1,1}$	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$
$e_2$	-	$m_{2,2}$	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$
$e_3$	-	-	$m_{3,3}$	$m_{3,4}$
$e_4$	-	-	-	$m_{4,4}$



# Les variables qui décrivent le problème

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

Que dire de  $m_{i,j}$  ?

On a  $m_{i,i} = 0$  !

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	0	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$
$e_2$	-	0	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$
$e_3$	-	-	0	$m_{3,4}$
$e_4$	-	-	-	0

# Les variables qui décrivent le problème

Que dire de  $m_{1,j}$  ?

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	0	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$
$e_2$	-	0	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$
$e_3$	-	-	0	$m_{3,4}$
$e_4$	-	-	-	0

# Les variables qui décrivent le problème

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

Que dire de  $m_{1,j}$  ?

On a  $m_{1,j} = 0$  !

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	0	$m_{1,2}$	$m_{1,3}$	$m_{1,4}$
$e_2$	-	0	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$
$e_3$	-	-	0	$m_{3,4}$
$e_4$	-	-	-	0

# Les variables qui décrivent le problème

Que dire de  $m_{1,j}$  ?

On a  $m_{1,j} = 0$  !

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Matchs gagnés	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	0	0	0	0
$e_2$	-	0	$m_{2,3}$	$m_{2,4}$
$e_3$	-	-	0	$m_{3,4}$
$e_4$	-	-	-	0

# Les variables qui décrivent le problème

Que dire si pour une équipe  $e_j$ ,  $g_j > g_1$  ?

# Les variables qui décrivent le problème

Que dire si pour une équipe  $e_j$ ,  $g_j > g_1$  ?

Alors  $e_1$  est éliminée mathématiquement !

# Les variables qui décrivent le problème

Que dire si pour une équipe  $e_i$ ,  $g_i > g_1$  ?

Alors  $e_1$  est éliminée mathématiquement !

Dans la suite, on suppose donc que pour toute équipe  $e_i$ ,  $g_i \leq g_1$

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$



- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

Que peut-on dire sur les  $v_{i,j}$  quand on est à la fin des poules, et que tous les matchs ont été joués ?

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

Que peut-on dire sur les  $v_{i,j}$  quand on est à la fin des poules, et que tous les matchs ont été joués ?

On a l'équation  $v_{i,j} + v_{j,i} = m_{i,j}$

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

Comment écrire le fait que à la fin de poules,  $e_i$  a moins de points que  $e_1$  ?

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

Comment écrire le fait que à la fin de poules,  $e_i$  a moins de points que  $e_1$  ?

$$g_i + v_{i,2} + v_{i,3} + \cdots + v_{i,n} \leq g_1$$

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

Comment écrire le fait que à la fin de poules,  $e_i$  a moins de points que  $e_1$  ?

$$g_i + v_{i,2} + v_{i,3} + \cdots + v_{i,n} \leq g_1$$

c'est à dire

$$v_{i,2} + v_{i,3} + \cdots + v_{i,n} \leq g_1 - g_i$$

Les données :

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$
- ▶  $m_{i,j}$  : nombre de matchs restants entre  $e_i$  et  $e_j$

# Résumé

Les données :

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$
- ▶  $m_{i,j}$  : nombre de matchs restants entre  $e_i$  et  $e_j$

Les inconnues :

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

# Résumé

Les données :

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$
- ▶  $m_{i,j}$  : nombre de matchs restants entre  $e_i$  et  $e_j$

Les inconnues :

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

Les équations sur les données :

- ▶  $m_{i,j} = m_{j,i}$
- ▶  $m_{1,i} = m_{i,1} = 0$
- ▶  $g_i \leq g_1$



# Résumé

Les données :

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$
- ▶  $m_{i,j}$  : nombre de matchs restants entre  $e_i$  et  $e_j$

Les inconnues :

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

Les équations sur les données :

- ▶  $m_{i,j} = m_{j,i}$
- ▶  $m_{1,i} = m_{i,i} = 0$
- ▶  $g_i \leq g_1$

Les équations qu'on veut satisfaire avec les inconnues :

- ▶  $v_{i,j} + v_{j,i} = m_{i,j}$
- ▶  $v_{i,2} + v_{i,3} + \dots + v_{i,n} \leq g_1 - g_i$

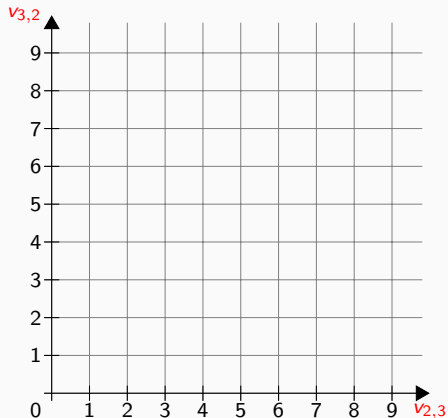
# Dessignons les équations

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	7	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	0
$e_2$	-	-	6
$e_3$	-	-	-



# Dessignons les équations

Nombre de matchs déjà gagnés :

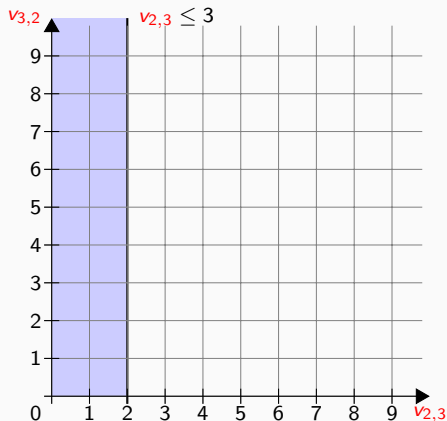
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	7	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	0
$e_2$	-	-	6
$e_3$	-	-	-

Équations :

►  $v_{2,3} \leq 10 - 7$



# Dessignons les équations

Nombre de matchs déjà gagnés :

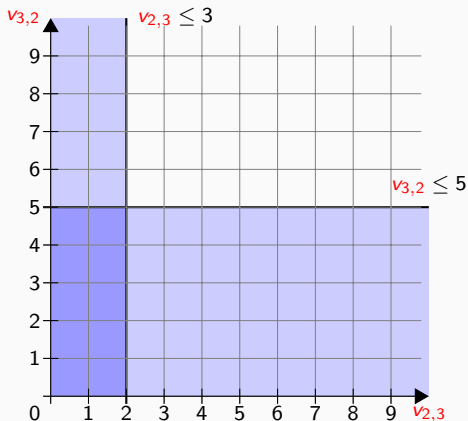
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	7	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	0
$e_2$	-	-	6
$e_3$	-	-	-

Équations :

- ▶  $v_{2,3} \leq 10 - 7$
- ▶  $v_{3,2} \leq 10 - 5$



# Dessignons les équations

Nombre de matchs déjà gagnés :

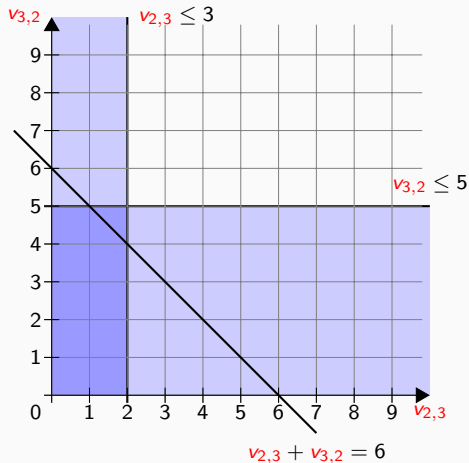
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	7	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	0
$e_2$	-	-	6
$e_3$	-	-	-

Équations :

- ▶  $v_{2,3} \leq 10 - 7$
- ▶  $v_{3,2} \leq 10 - 5$
- ▶  $v_{2,3} + v_{3,2} = 6$



# Dessignons les équations

Nombre de matchs déjà gagnés :

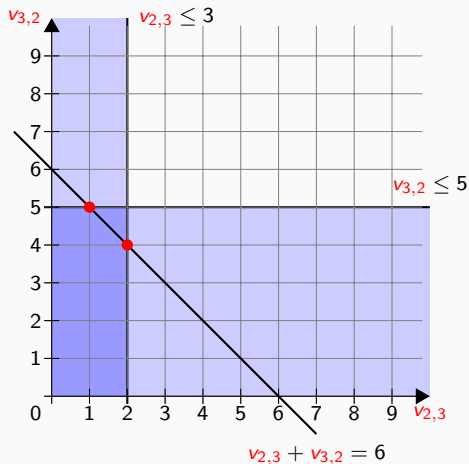
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	7	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	0
$e_2$	-	-	6
$e_3$	-	-	-

Équations :

- ▶  $v_{2,3} \leq 10 - 7$
- ▶  $v_{3,2} \leq 10 - 5$
- ▶  $v_{2,3} + v_{3,2} = 6$



# Dessins les équations

Nombre de matchs déjà gagnés :

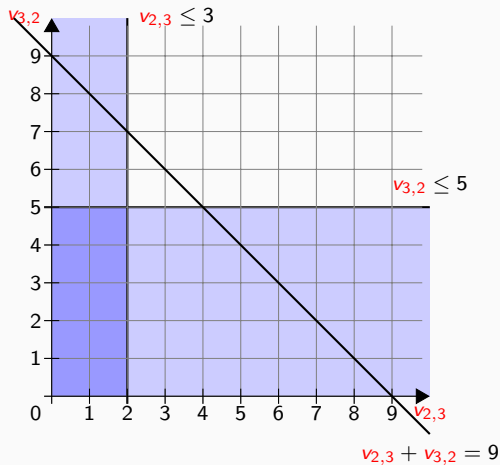
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	7	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	0
$e_2$	-	-	9
$e_3$	-	-	-

Équations :

- ▶  $v_{2,3} \leq 10 - 7$
- ▶  $v_{3,2} \leq 10 - 5$
- ▶  $v_{2,3} + v_{3,2} = 9$



# Dessignons les équations

Nombre de matchs déjà gagnés :

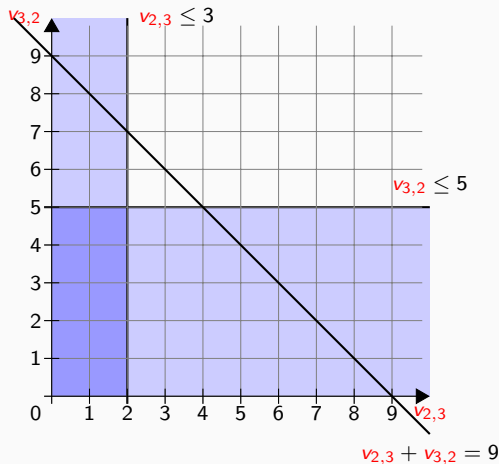
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	7	5

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	0
$e_2$	-	-	9
$e_3$	-	-	-

Équations :

- ▶  $v_{2,3} \leq 10 - 7$
- ▶  $v_{3,2} \leq 10 - 5$
- ▶  $v_{2,3} + v_{3,2} = 9$



C'est un problème de résolution de contraintes



# Dessignons les équations

Maximisation sous contraintes :

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	7	5

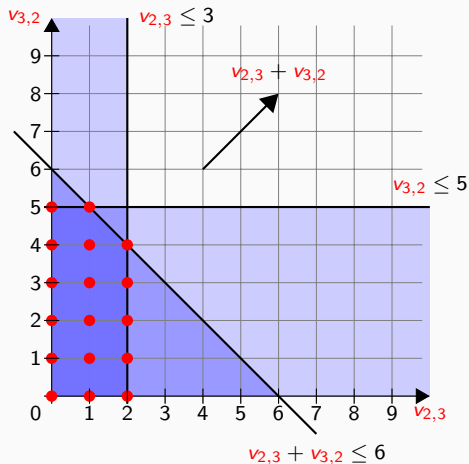
Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	0
$e_2$	-	-	6
$e_3$	-	-	-

Équations :

- ▶  $v_{2,3} \leq 10 - 7$
- ▶  $v_{3,2} \leq 10 - 5$
- ▶  $v_{2,3} + v_{3,2} \leq 6$

Maximisation :  $v_{2,3} + v_{3,2}$



# Dessignons les équations

Maximisation sous contraintes :

Nombre de matchs déjà gagnés :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
Matchs gagnés	10	7	5

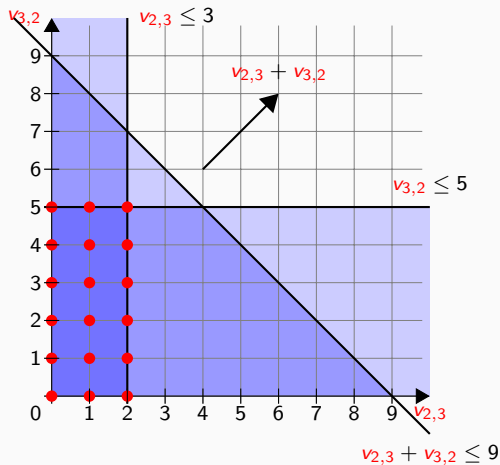
Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_1$	-	0	0
$e_2$	-	-	9
$e_3$	-	-	-

Équations :

- ▶  $v_{2,3} \leq 10 - 7$
- ▶  $v_{3,2} \leq 10 - 5$
- ▶  $v_{2,3} + v_{3,2} \leq 9$

Maximisation :  $v_{2,3} + v_{3,2}$



# Changement d'équations

On change l'équation  $v_{i,j} + v_{j,i} = m_{i,j}$  en  $v_{i,j} + v_{j,i} \leq m_{i,j}$

# Changement d'équations

On change l'équation  $v_{i,j} + v_{j,i} = m_{i,j}$  en  $v_{i,j} + v_{j,i} \leq m_{i,j}$

On rajoute l'objectif de maximiser la somme des  $v_{i,j} + v_{j,i}$

# Changement d'équations

On change l'équation  $v_{i,j} + v_{j,i} = m_{i,j}$  en  $v_{i,j} + v_{j,i} \leq m_{i,j}$

On rajoute l'objectif de maximiser la somme des  $v_{i,j} + v_{j,i}$

Par exemple, avec 4 équipes, on maximise :

$$\underbrace{v_{2,3} + v_{3,2}}_{\leq m_{2,3}} + \underbrace{v_{2,4} + v_{4,2}}_{\leq m_{2,4}} + \underbrace{v_{3,4} + v_{4,3}}_{\leq m_{3,4}} \leq m_{2,3} + m_{2,4} + m_{3,4}$$

Les données :

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$
- ▶  $m_{i,j}$  : nombre de matchs restants entre  $e_i$  et  $e_j$

# Résumé

Les données :

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$
- ▶  $m_{i,j}$  : nombre de matchs restants entre  $e_i$  et  $e_j$

Les inconnues

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

# Résumé

Les données :

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$
- ▶  $m_{i,j}$  : nombre de matchs restants entre  $e_i$  et  $e_j$

Les inconnues

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

Les équations sur les données :

- ▶  $m_{i,j} = m_{j,i}$  et  $m_{i,i} = 0$  et  $m_{1,i} = 0$
- ▶  $g_i \leq g_1$



# Résumé

Les données :

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$
- ▶  $m_{i,j}$  : nombre de matchs restants entre  $e_i$  et  $e_j$

Les inconnues

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

Les équations sur les données :

- ▶  $m_{i,j} = m_{j,i}$  et  $m_{i,i} = 0$  et  $m_{1,i} = 0$
- ▶  $g_i \leq g_1$

Les équations qu'on veut satisfaire avec les inconnues :

- ▶  $v_{i,j} + v_{j,i} \leq m_{i,j}$
- ▶  $v_{i,2} + v_{i,3} + \dots + v_{i,n} \leq g_1 - g_i$

# Résumé

Les données :

- ▶  $g_i$  : nombre de matchs déjà gagnés par  $e_i$
- ▶  $m_{i,j}$  : nombre de matchs restants entre  $e_i$  et  $e_j$

Les inconnues

- ▶  $v_{i,j}$  : le nombre de matchs que  $e_i$  a gagné contre  $e_j$

Les équations sur les données :

- ▶  $m_{i,j} = m_{j,i}$  et  $m_{i,i} = 0$  et  $m_{1,i} = 0$
- ▶  $g_i \leq g_1$

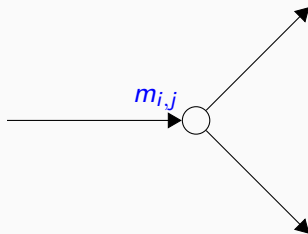
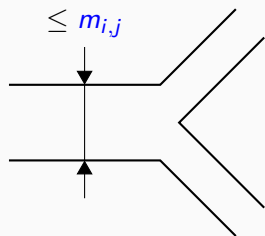
Les équations qu'on veut satisfaire avec les inconnues :

- ▶  $v_{i,j} + v_{j,i} \leq m_{i,j}$
- ▶  $v_{i,2} + v_{i,3} + \dots + v_{i,n} \leq g_1 - g_i$

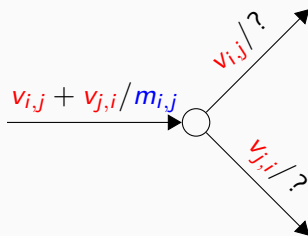
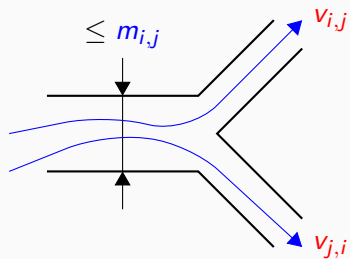
Ce qu'on cherche à maximiser :

- ▶ La somme des  $v_{i,j} + v_{j,i}$

# Des équations et des tuyaux

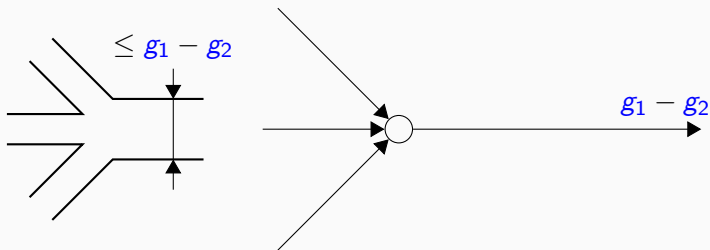


# Des équations et des tuyaux

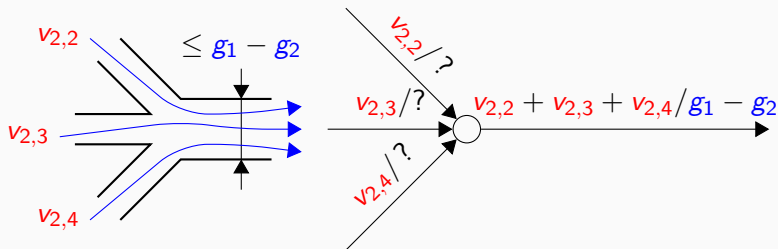


$$v_{i,j} + v_{j,i} \leq m_{i,j}$$

# Des équations et des tuyaux

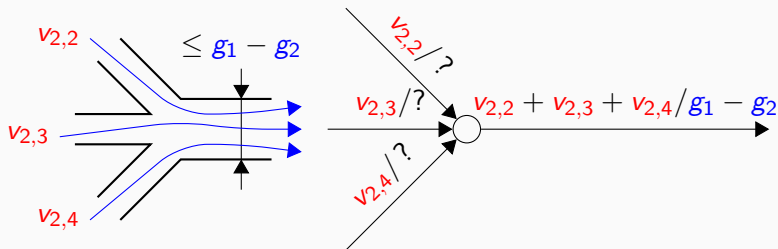


# Des équations et des tuyaux



$$v_{2,2} + v_{2,3} + v_{2,4} \leq g_1 - g_2$$

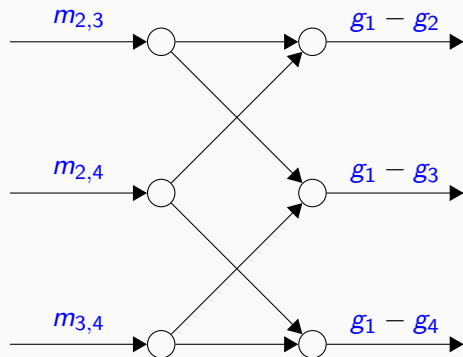
# Des équations et des tuyaux



$$v_{2,2} + v_{2,3} + v_{2,4} \leq g_1 - g_2$$

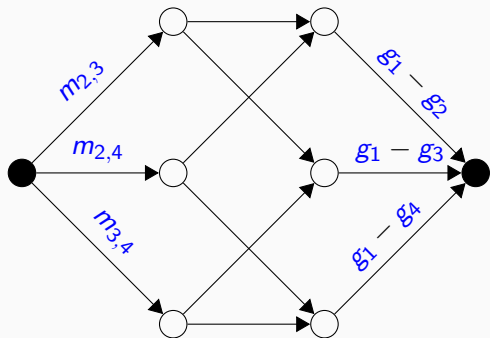
$$v_{i,2} + v_{i,3} + \dots + v_{i,n} \leq g_1 - g_i$$

# Des exemples de graphe

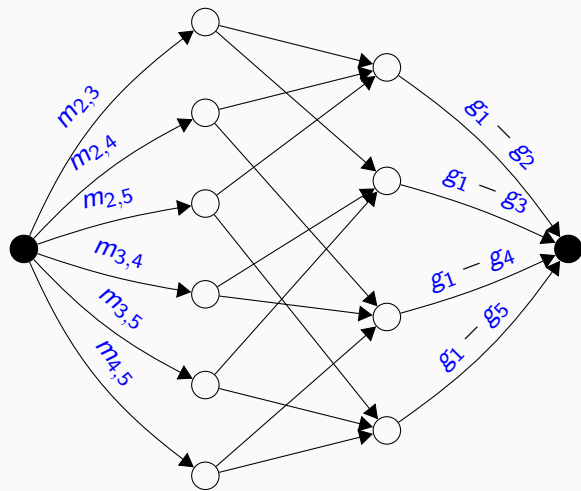




# Des exemples de graphe



# Des exemples de graphe



# Sommaire

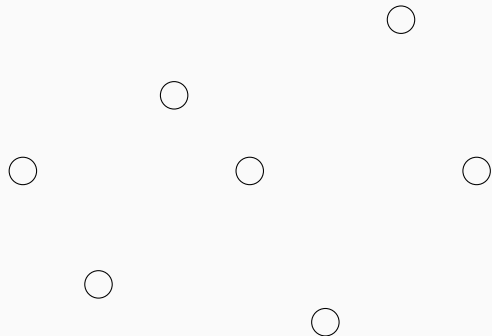
Prise en main du problème

Résolution naïve du problème

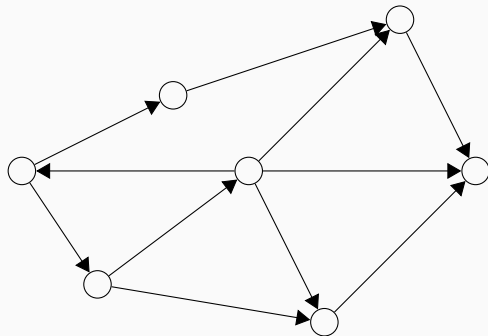
Analyse mathématique du problème

**Résolution du flot maximal**

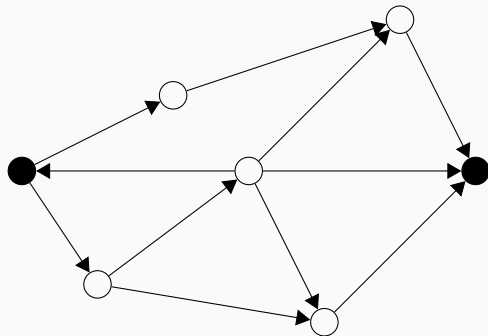
# Flot maximal



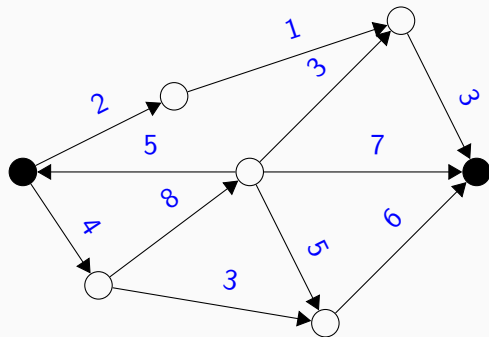
# Flot maximal



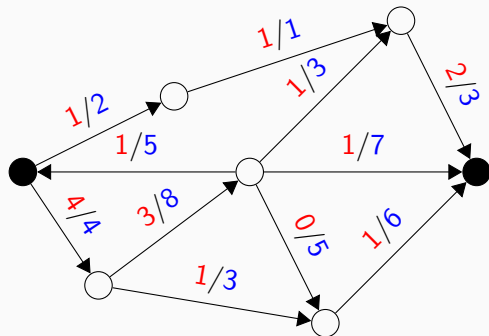
# Flot maximal



# Flot maximal



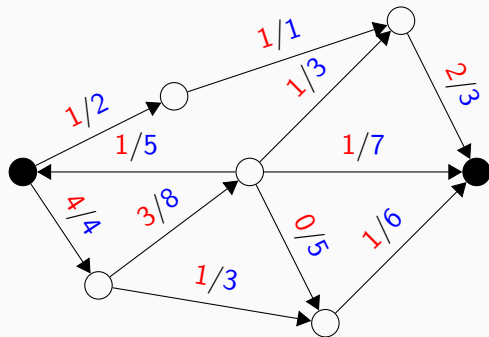
# Flot maximal





# Flot maximal

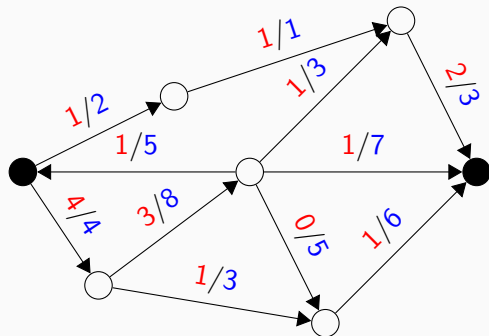
Contraintes sur le flot :



# Flot maximal

Contraintes sur le flot :

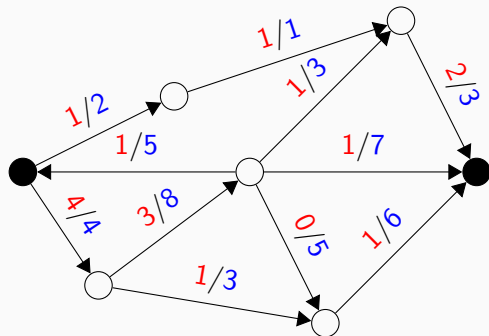
- ▶ Débits entiers



# Flot maximal

Contraintes sur le flot :

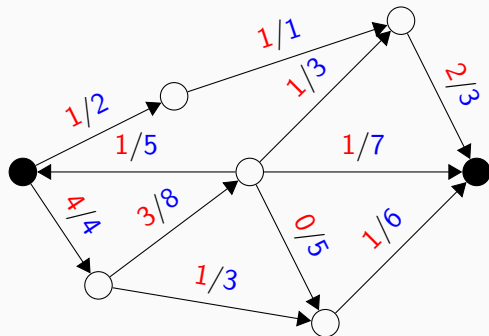
- ▶ Débits entiers
- ▶ Débits  $\leq$  capacité



# Flot maximal

Contraintes sur le flot :

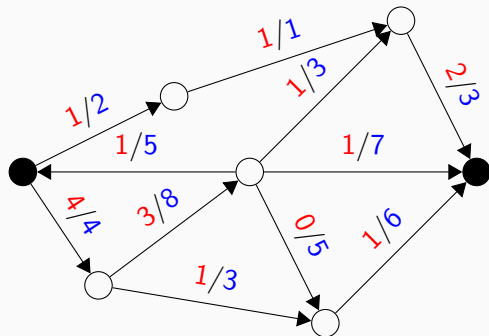
- ▶ Débits entiers
- ▶ Débits  $\leq$  capacité
- ▶ Débit entrant = débit sortant



# Flot maximal

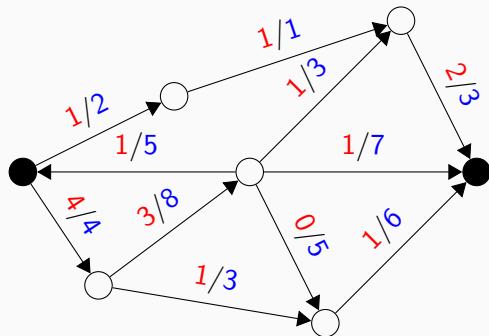
Contraintes sur le flot :

- ▶ Débits entiers
- ▶ Débits  $\leq$  capacité
- ▶ Débit entrant = débit sortant



Valeur du flot :

# Flot maximal



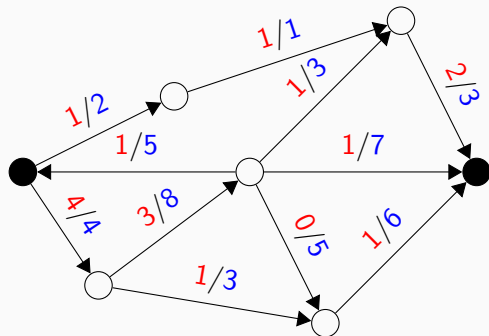
Contraintes sur le flot :

- ▶ Débits entiers
- ▶ Débits  $\leq$  capacité
- ▶ Débit entrant = débit sortant

Valeur du flot :

- ▶ À la source : débit sortant - débit entrant

# Flot maximal



Contraintes sur le flot :

- ▶ Débits entiers
- ▶ Débits  $\leq$  capacité
- ▶ Débit entrant = débit sortant

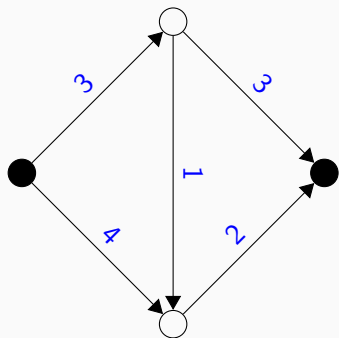
Valeur du flot :

- ▶ À la source :  
débit sortant -  
débit entrant

But :

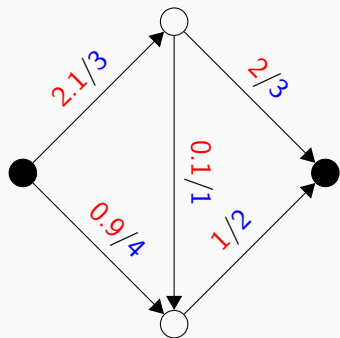
- ▶ Trouver un flot de  
valeur maximale

# Des flots corrects ?

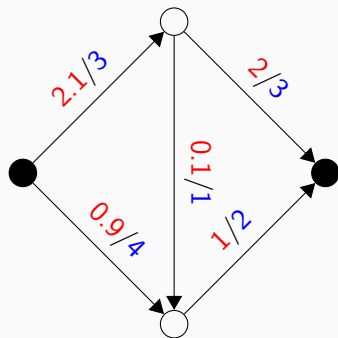




# Des flots corrects ?

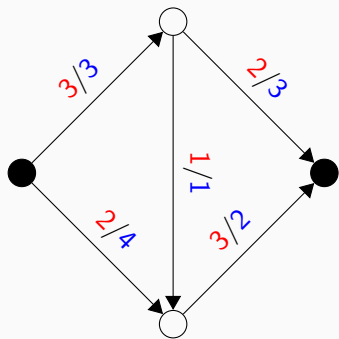


# Des flots corrects ?

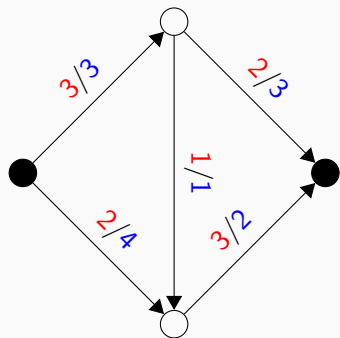


Incorrect :  
débits entiers

# Des flots corrects ?

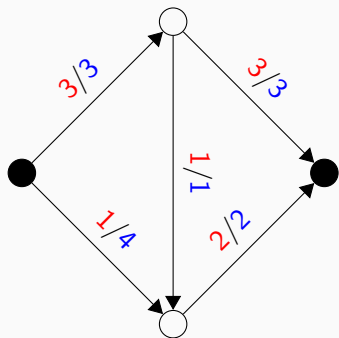


# Des flots corrects ?

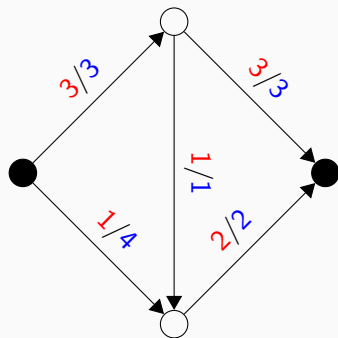


Incorrect :  
débit  $\leq$  capacité

# Des flots corrects ?

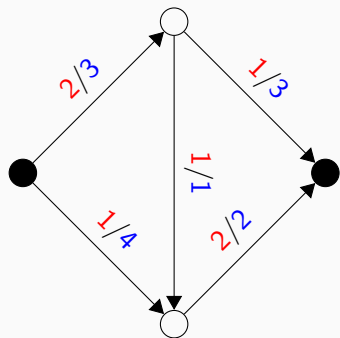


# Des flots corrects ?

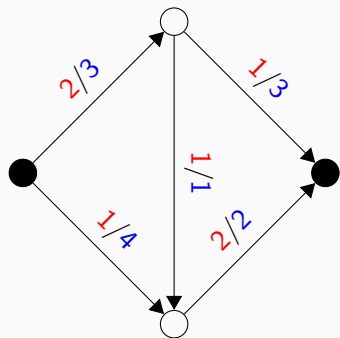


Incorrect :  
débit entrant = débit sortant

# Des flots corrects ?



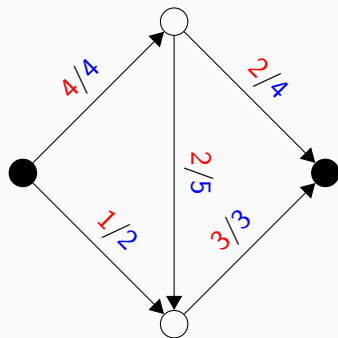
# Des flots corrects ?



Correct !

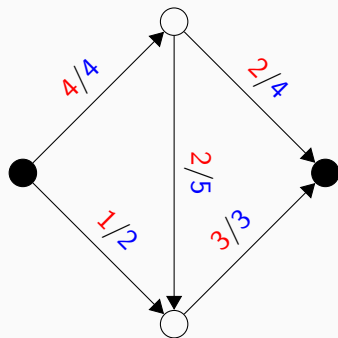


# Des exemples de flots



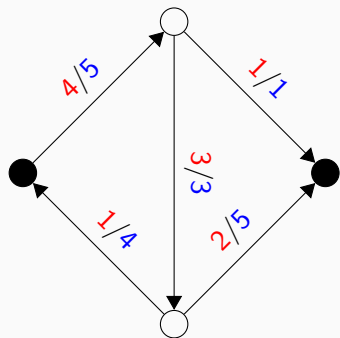
Valeur du flot :

# Des exemples de flots



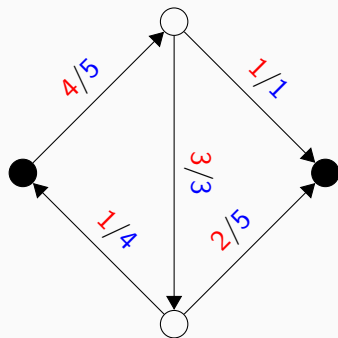
Valeur du flot :  $4 + 1 = 5$

# Des exemples de flots



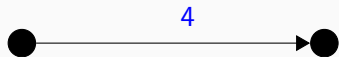
Valeur du flot :

# Des exemples de flots



Valeur du flot :  $4 - 1 = 3$

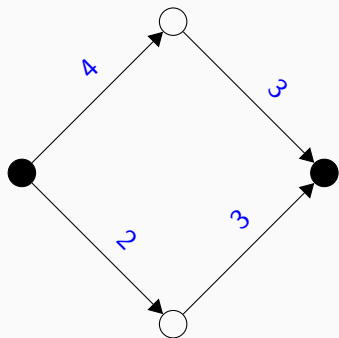
# Quelques flots maximaux



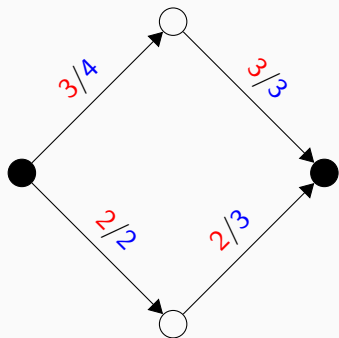
# Quelques flots maximaux



## Quelques flots maximaux

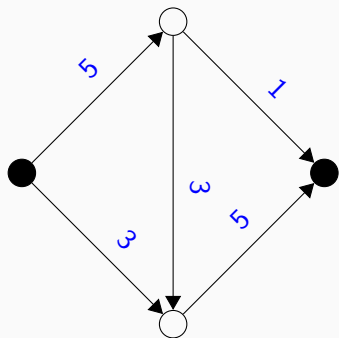


# Quelques flots maximaux

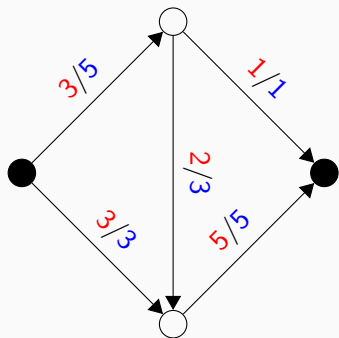




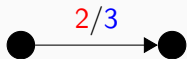
## Quelques flots maximaux



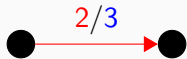
# Quelques flots maximaux



# Comment augmenter le flot



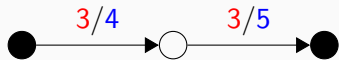
# Comment augmenter le flot



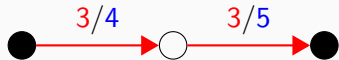
# Comment augmenter le flot



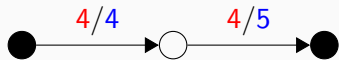
# Comment augmenter le flot



# Comment augmenter le flot

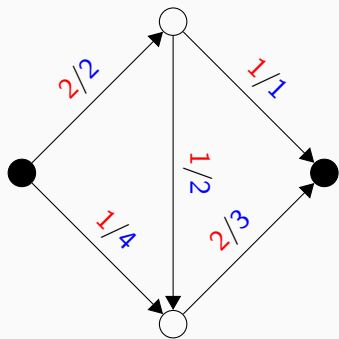


# Comment augmenter le flot

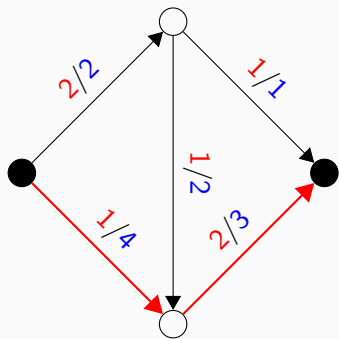




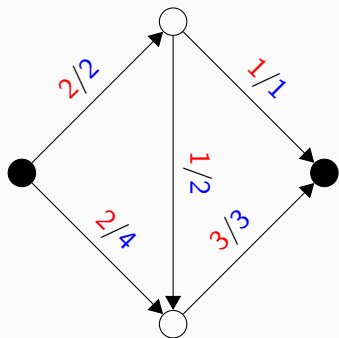
# Comment augmenter le flot



# Comment augmenter le flot

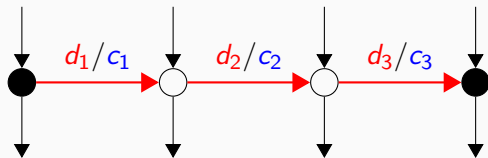


# Comment augmenter le flot



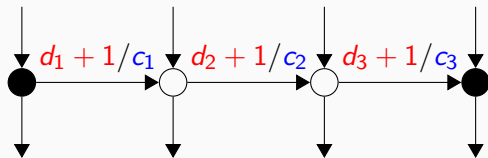
# Notion de chemin augmentant

S'il existe un chemin de la source au puits passant par des tuyaux vérifiant débit < capacité, alors on peut augmenter le flot



# Notion de chemin augmentant

S'il existe un chemin de la source au puits passant par des tuyaux vérifiant débit < capacité, alors on peut augmenter le flot



Pourquoi ça reste un flot valide ?

Pourquoi ça reste un flot valide ?

- ▶ Débits entiers positifs : ok

Pourquoi ça reste un flot valide ?

- ▶ Débits entiers positifs : ok
- ▶ Débits  $\leq$  capacités : ok



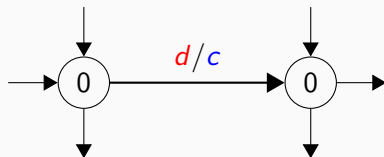
Pourquoi ça reste un flot valide ?

- ▶ Débits entiers positifs : ok
- ▶ Débits  $\leq$  capacités : ok
- ▶ Débit entrant = débit sortant ?

# Notion de chemin augmentant

Pourquoi ça reste un flot valide ?

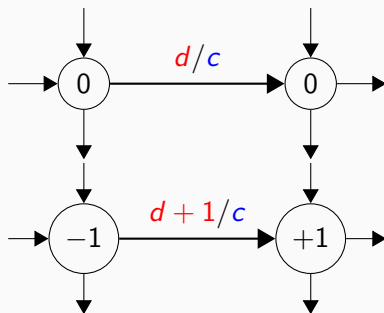
- ▶ Débits entiers positifs : ok
- ▶ Débits  $\leq$  capacités : ok
- ▶ Débit entrant = débit sortant ?



# Notion de chemin augmentant

Pourquoi ça reste un flot valide ?

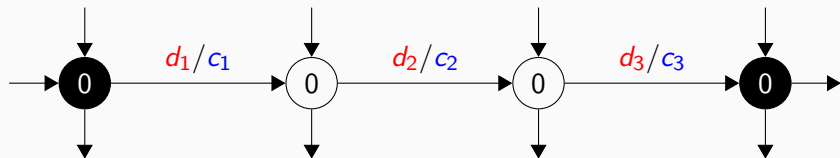
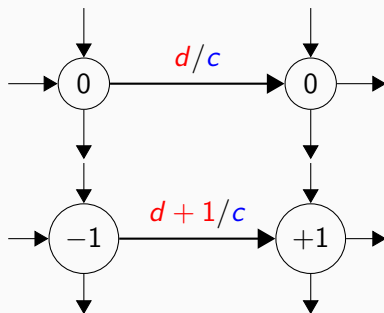
- ▶ Débits entiers positifs : ok
- ▶ Débits  $\leq$  capacités : ok
- ▶ Débit entrant = débit sortant ?



# Notion de chemin augmentant

Pourquoi ça reste un flot valide ?

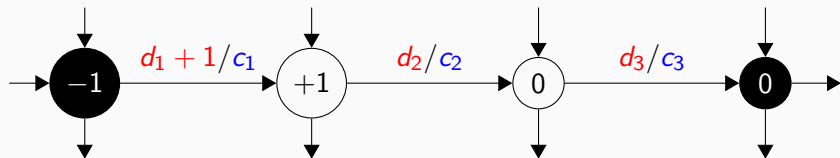
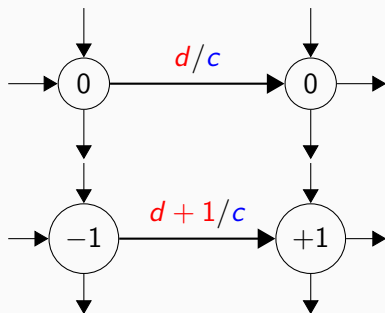
- ▶ Débits entiers positifs : ok
- ▶ Débits  $\leq$  capacités : ok
- ▶ Débit entrant = débit sortant ?



# Notion de chemin augmentant

Pourquoi ça reste un flot valide ?

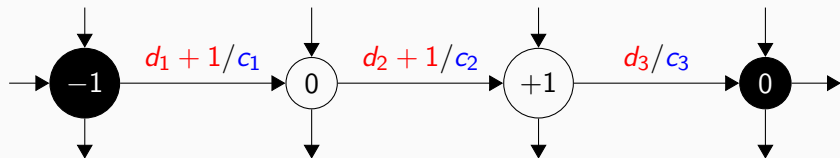
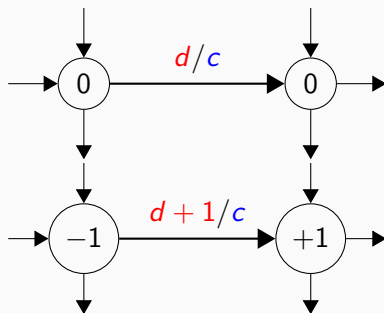
- ▶ Débits entiers positifs : ok
- ▶ Débits  $\leq$  capacités : ok
- ▶ Débit entrant = débit sortant ?



# Notion de chemin augmentant

Pourquoi ça reste un flot valide ?

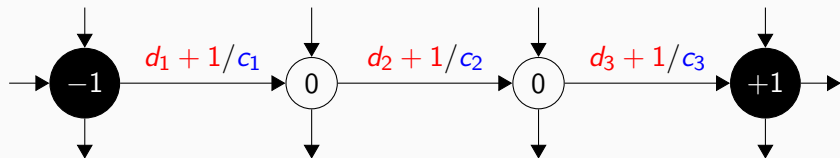
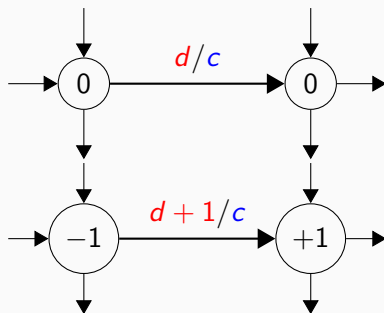
- ▶ Débits entiers positifs : ok
- ▶ Débits  $\leq$  capacités : ok
- ▶ Débit entrant = débit sortant ?



# Notion de chemin augmentant

Pourquoi ça reste un flot valide ?

- ▶ Débits entiers positifs : ok
- ▶ Débits  $\leq$  capacités : ok
- ▶ Débit entrant = débit sortant ?



# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal



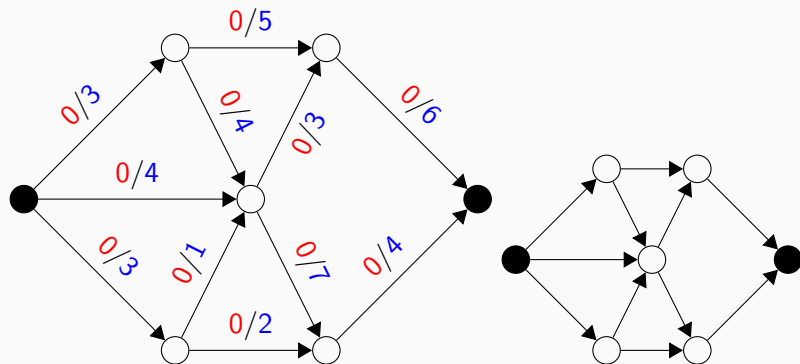
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal

- ▶ On part d'un flot nul

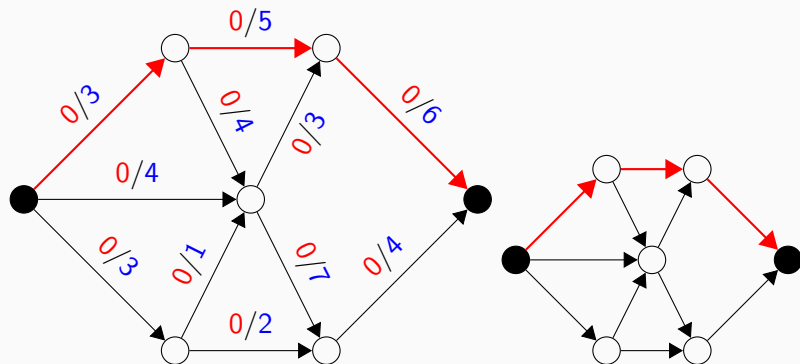
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal

- ▶ On part d'un flot nul
- ▶ Tant qu'on peut augmenter le flot avec un chemin augmentant, on l'augmente

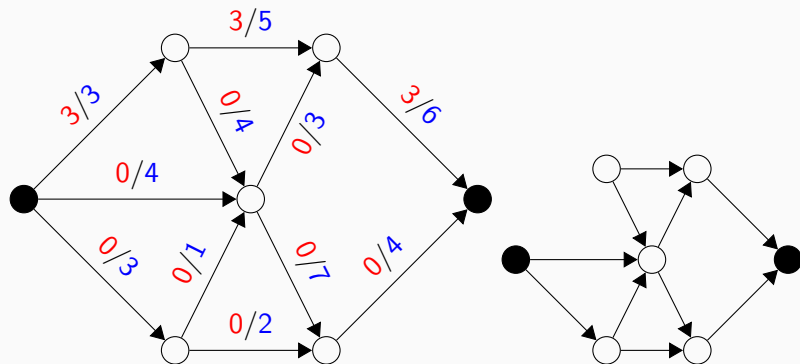
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal



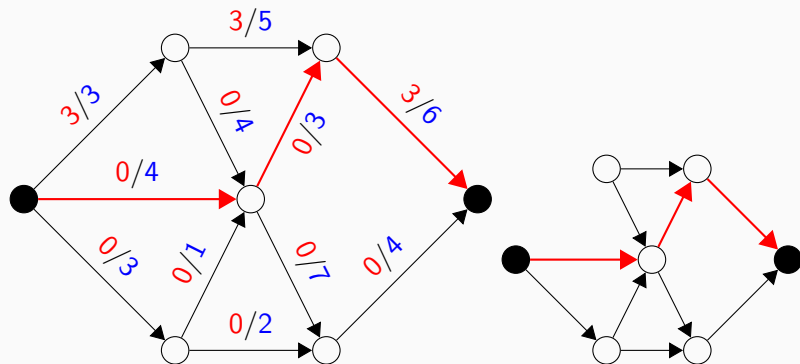
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal



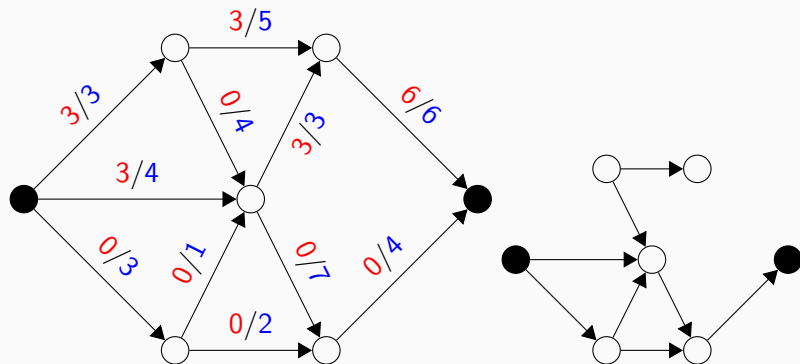
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal



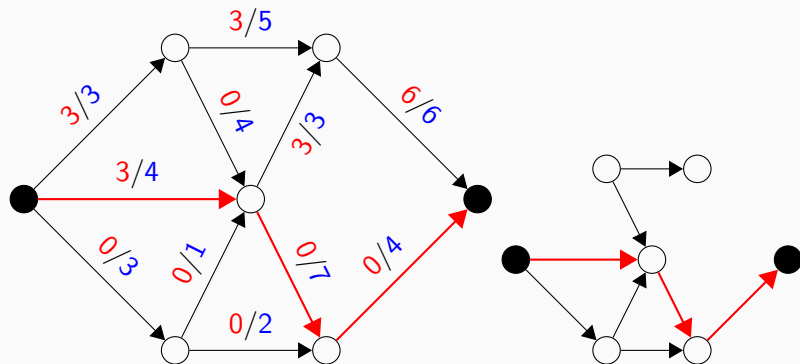
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal



# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal

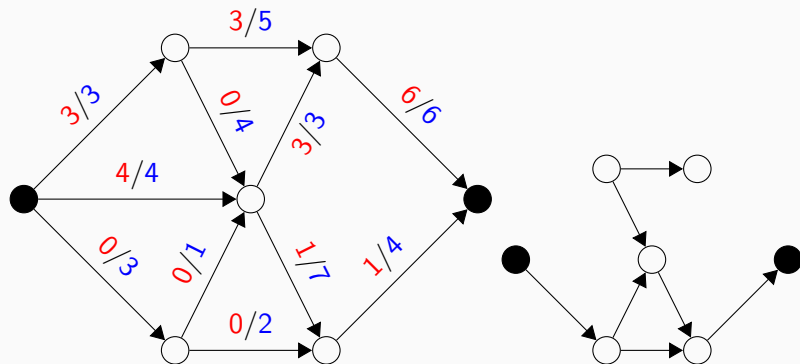


# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal

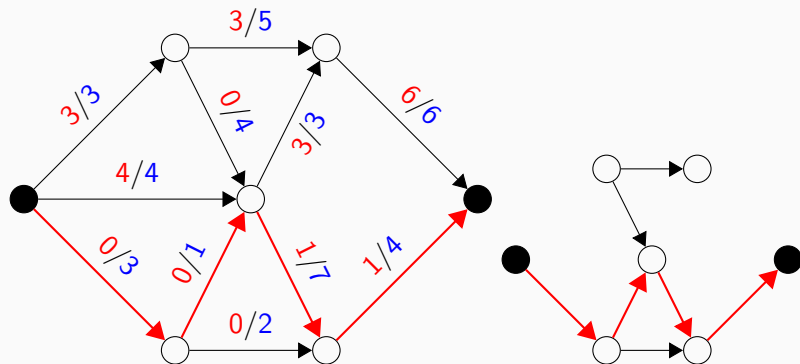




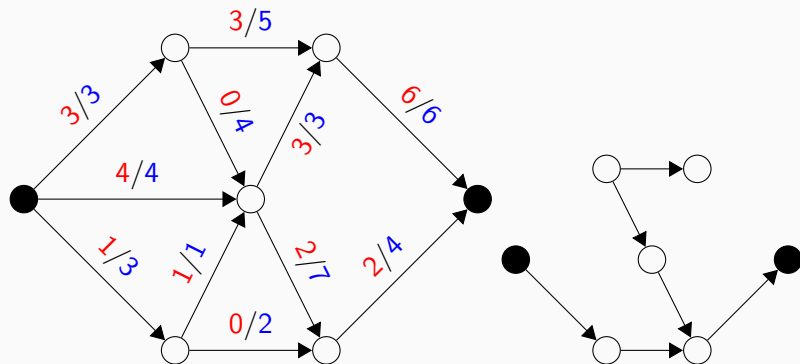
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal



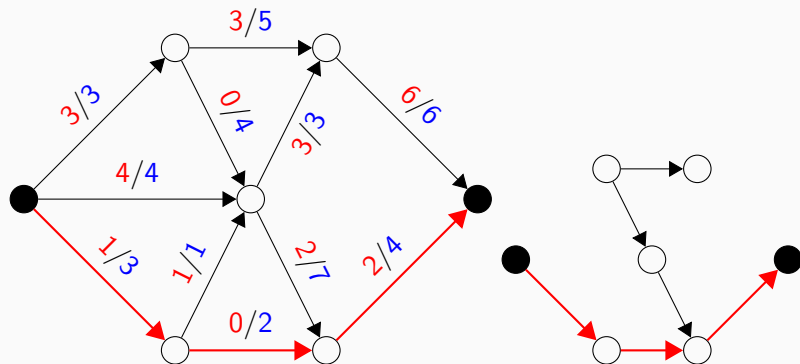
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal



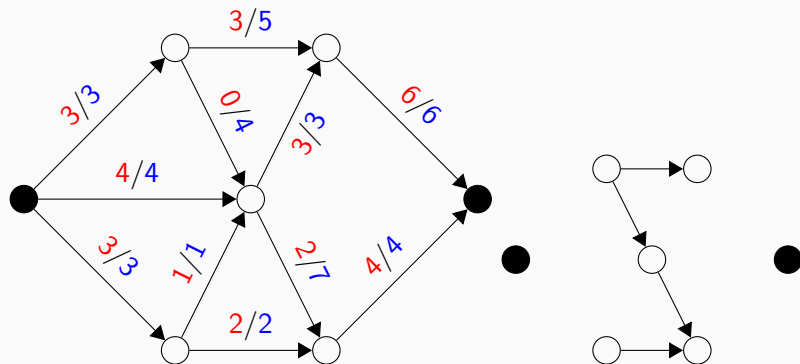
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal



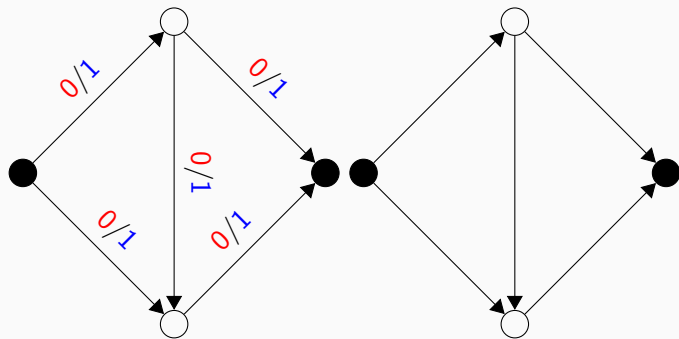
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal



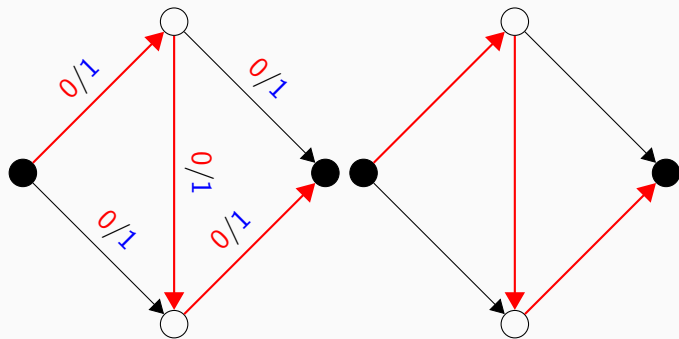
# Un début d'algorithme pour trouver le flot maximal



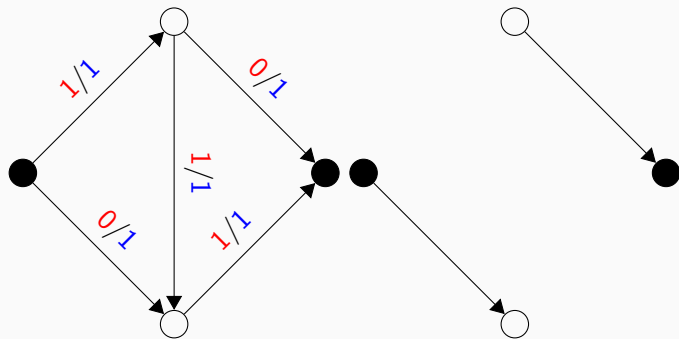
# Un problème



# Un problème

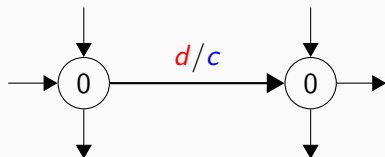


# Un problème

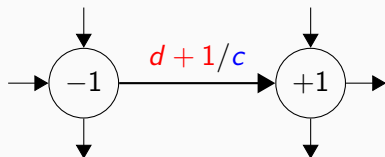




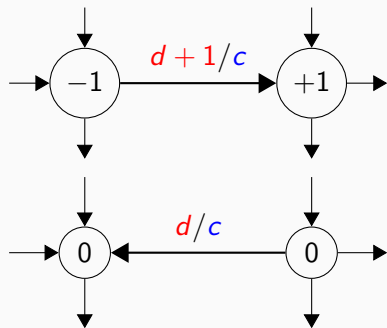
# Notion de chemin augmentant (bis)



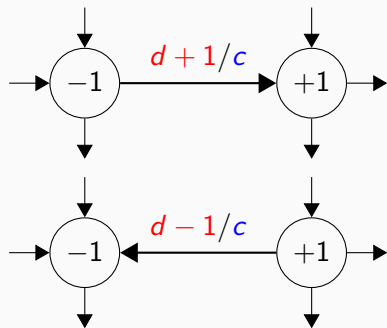
# Notion de chemin augmentant (bis)



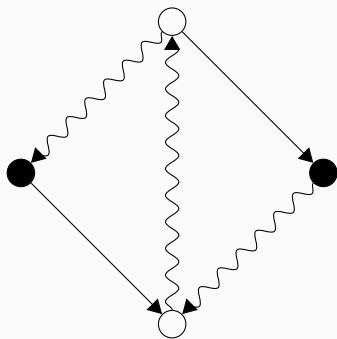
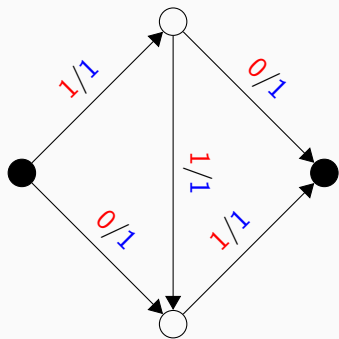
# Notion de chemin augmentant (bis)



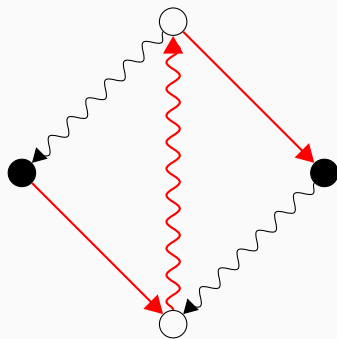
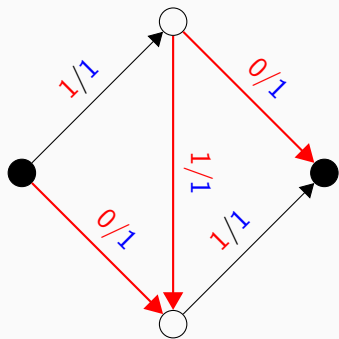
# Notion de chemin augmentant (bis)



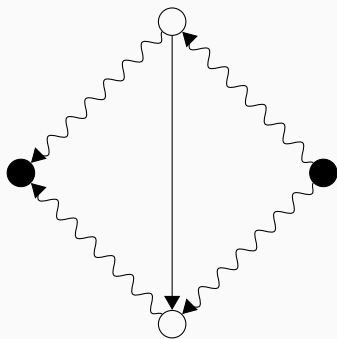
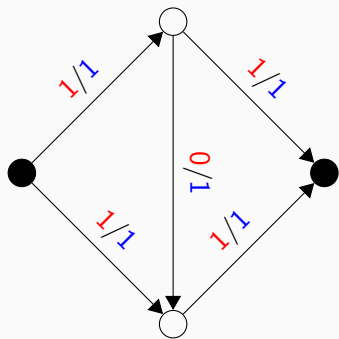
# Plus de problème



# Plus de problème



# Plus de problème



# Comment montrer qu'une quantité est maximale ?

Flot maximum : flot qui est plus grand que tous les autres flots.



# Comment montrer qu'une quantité est maximale ?

Flot maximum : flot qui est plus grand que tous les autres flots.

Deux choses :

# Comment montrer qu'une quantité est maximale ?

Flot maximum : flot qui est plus grand que tous les autres flots.

Deux choses :

- ▶ une quantité plus grande que tous les flots

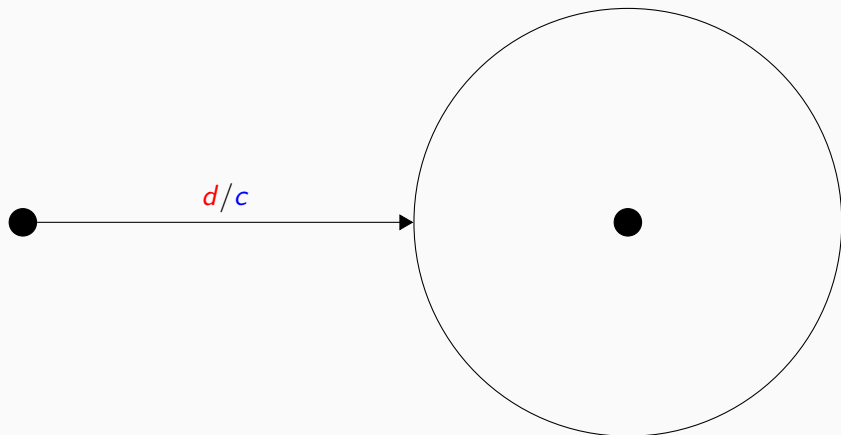
# Comment montrer qu'une quantité est maximale ?

Flot maximum : flot qui est plus grand que tous les autres flots.

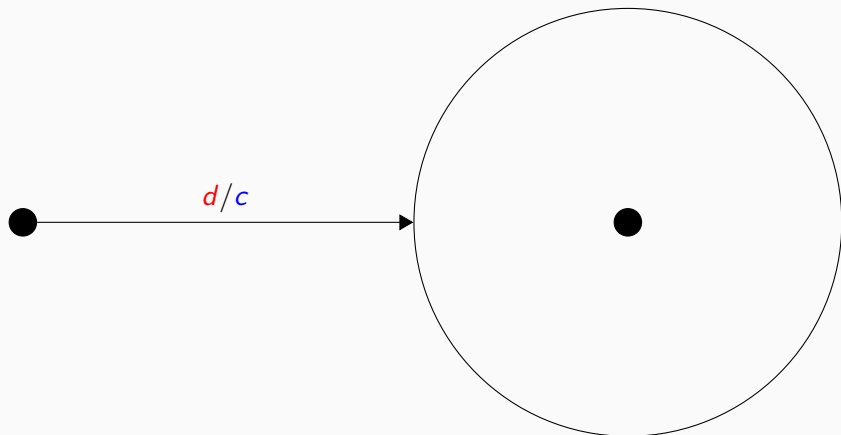
Deux choses :

- ▶ une quantité plus grande que tous les flots
- ▶ un flot égal à cette quantité

# Quelques essais

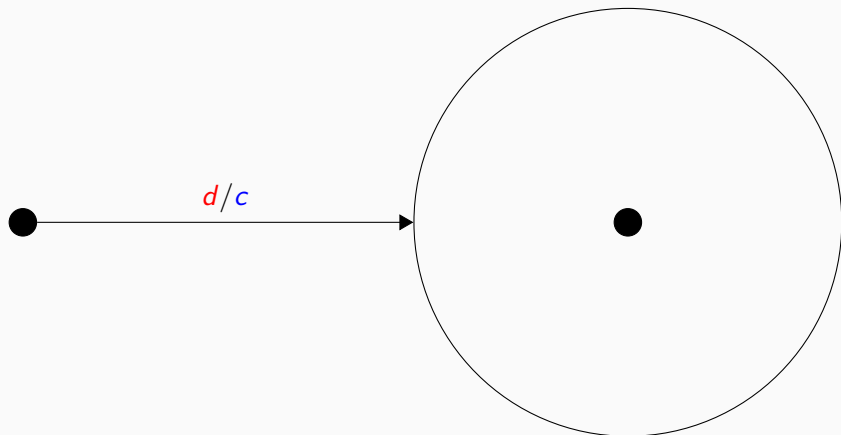


# Quelques essais



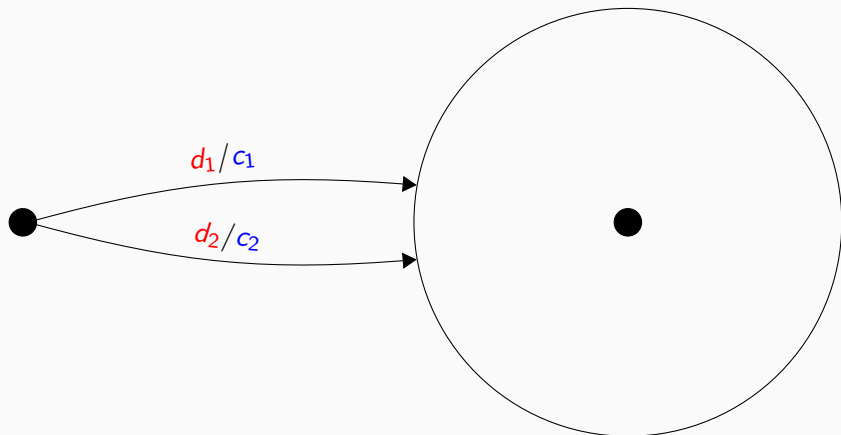
Flot :  $d$

## Quelques essais

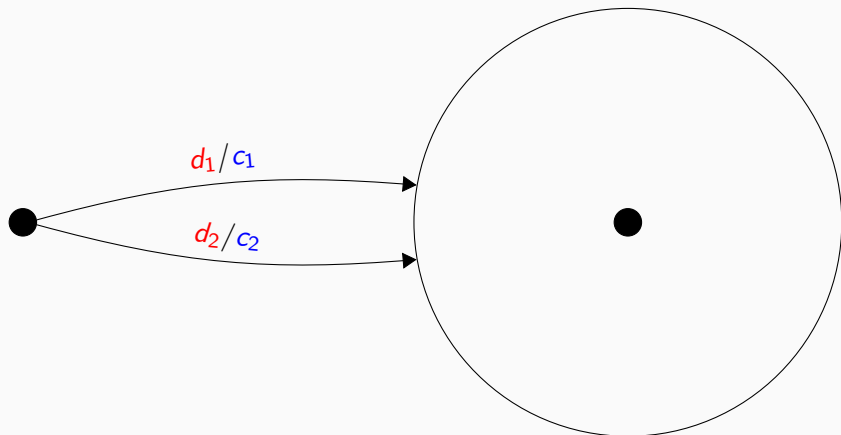


Flot :  $d \leq c$

# Quelques essais



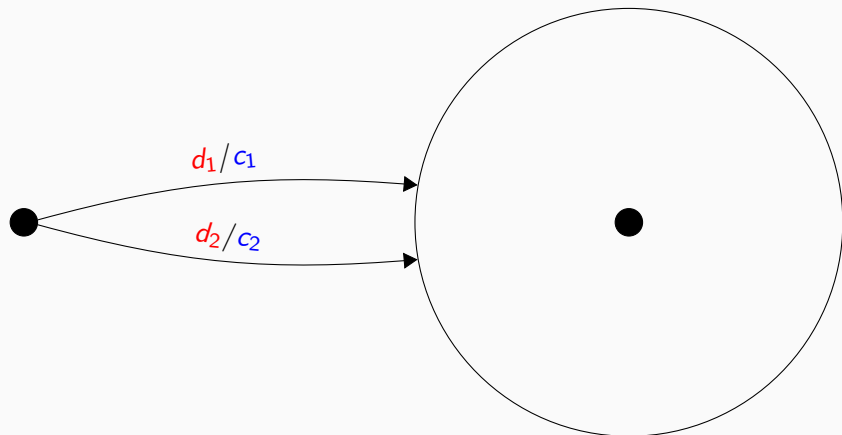
# Quelques essais



Flot :  $d_1 + d_2$

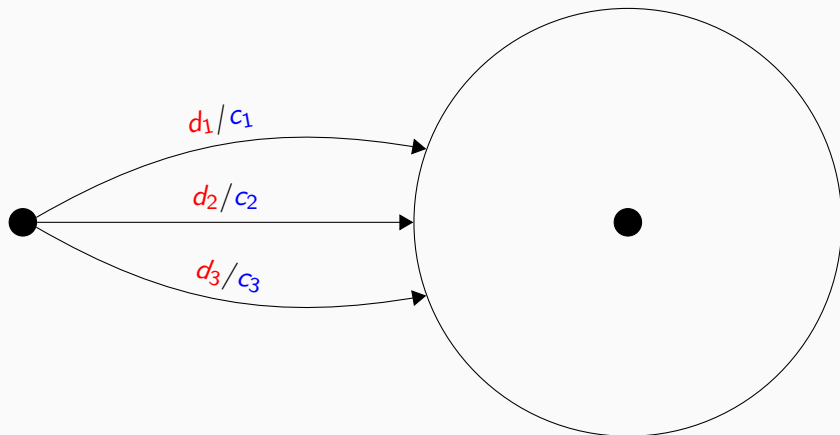


# Quelques essais

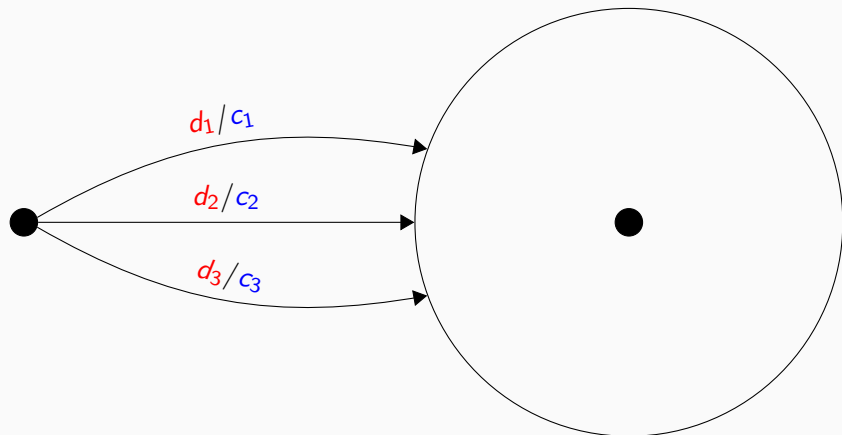


$$\text{Flot : } \underbrace{d_1}_{\leq c_1} + \underbrace{d_2}_{\leq c_2} \leq c_1 + c_2$$

# Quelques essais

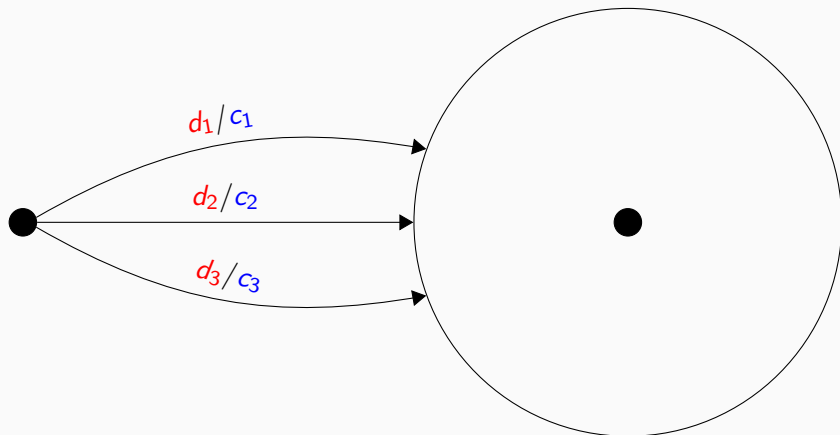


# Quelques essais



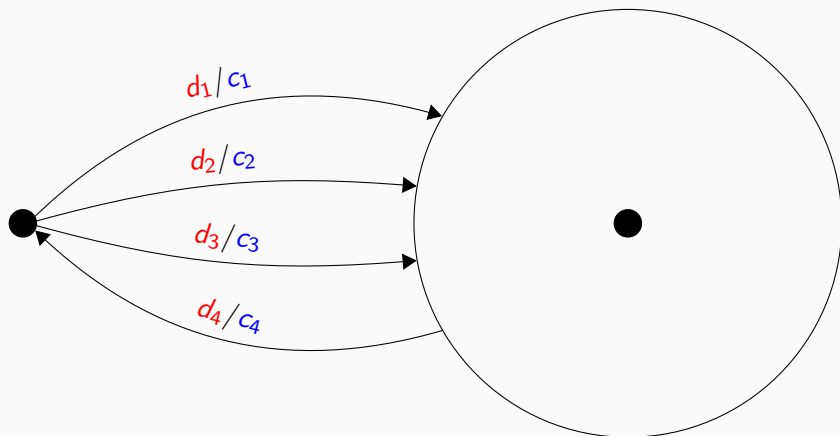
Flot :  $d_1 + d_2 + d_3$

# Quelques essais

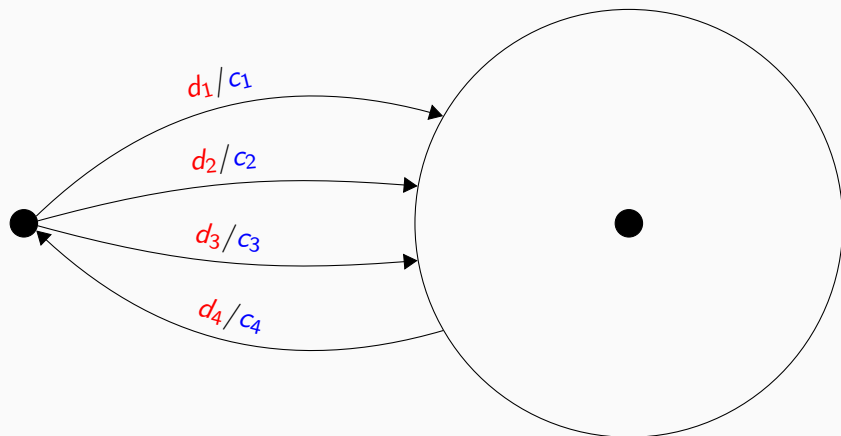


$$\text{Flot : } \underbrace{d_1}_{\leq c_1} + \underbrace{d_2}_{\leq c_2} + \underbrace{d_3}_{\leq c_3} \leq c_1 + c_2 + c_3$$

# Quelques essais

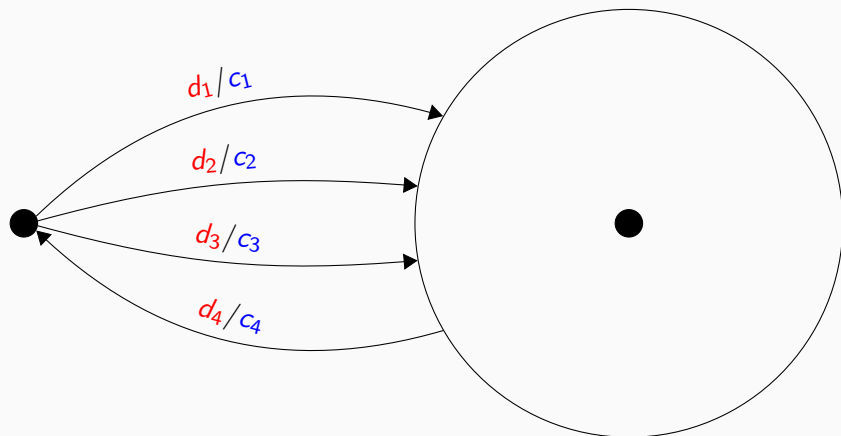


# Quelques essais



Flot :  $d_1 + d_2 + d_3 - d_4$

# Quelques essais



$$\text{Flot : } \underbrace{d_1}_{\leq c_1} + \underbrace{d_2}_{\leq c_2} + \underbrace{d_3}_{\leq c_3} - \underbrace{d_4}_{\geq 0} \leq c_1 + c_2 + c_3 + 0$$

# Conditions pour que ce majorant soit égal au flot

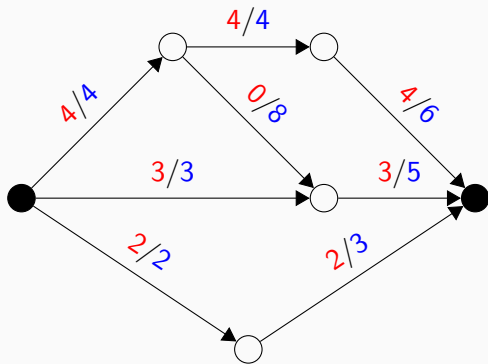


## Conditions pour que ce majorant soit égal au flot

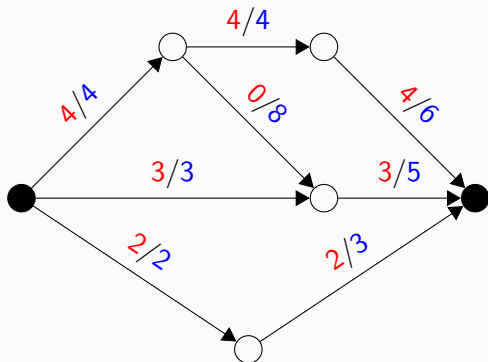
Les débits des tuyaux partant de la source sont égaux à leur capacité

Les débits des tuyaux allant à la source valent 0

# Testons ce majorant

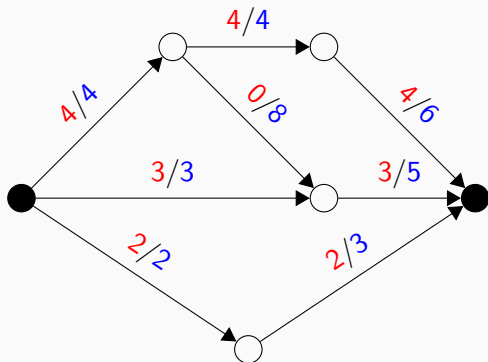


# Testons ce majorant



Majorant :  $4 + 3 + 2 = 9$

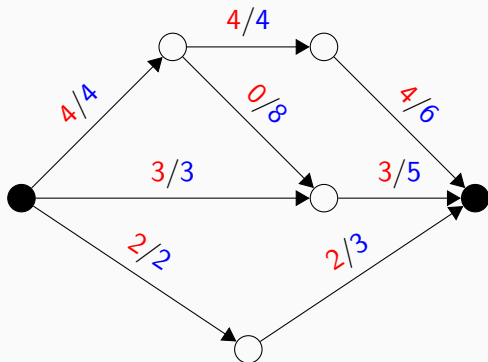
# Testons ce majorant



Majorant :  $4 + 3 + 2 = 9$

Flot :  $4 + 3 + 2 = 9$

# Testons ce majorant

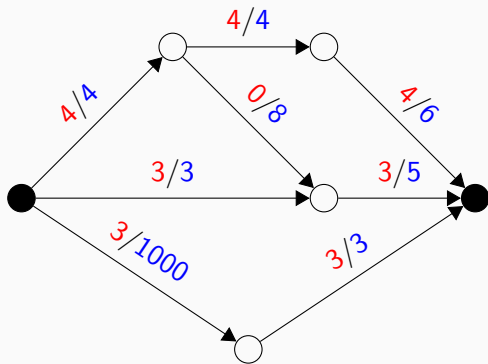


Majorant :  $4 + 3 + 2 = 9$

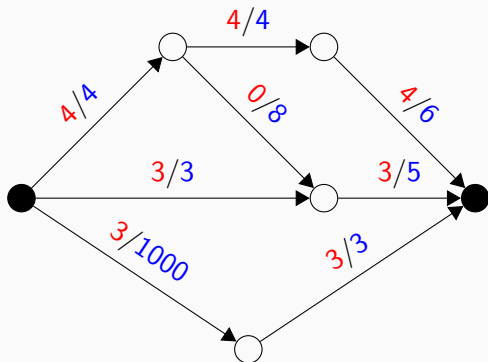
Flot :  $4 + 3 + 2 = 9$

Le flot est maximal !

# Testons ce majorant

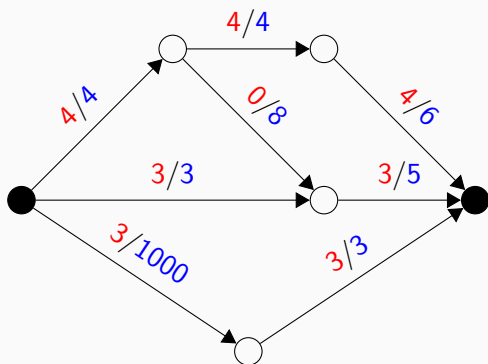


# Testons ce majorant



Majorant :  $4 + 3 + 1000 = 1007$

# Testons ce majorant

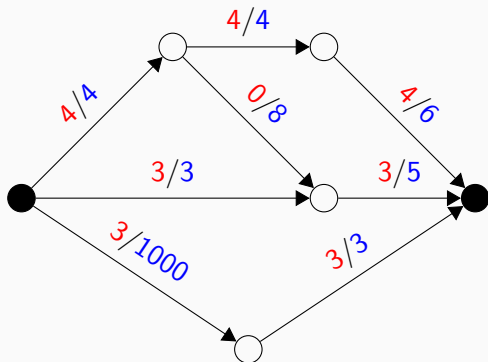


Majorant :  $4 + 3 + 1000 = 1007$

Flot :  $4 + 3 + 3 = 10$



# Testons ce majorant

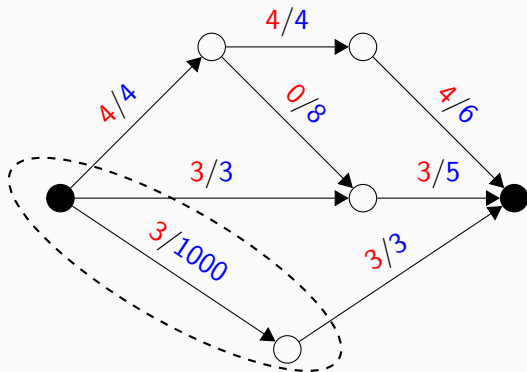


Majorant :  $4 + 3 + 1000 = 1007$

Flot :  $4 + 3 + 3 = 10$

Ce majorant ne permet pas d'affirmer que le flot est maximal

# Testons ce majorant

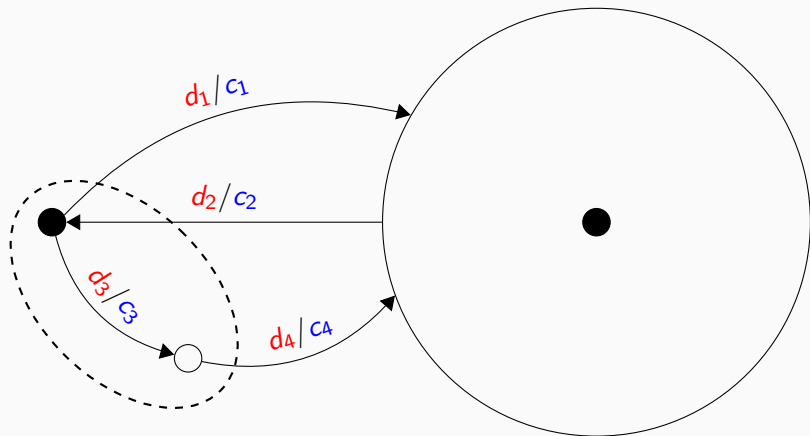


Majorant :  $4 + 3 + 1000 = 1007$

Flot :  $4 + 3 + 3 = 10$

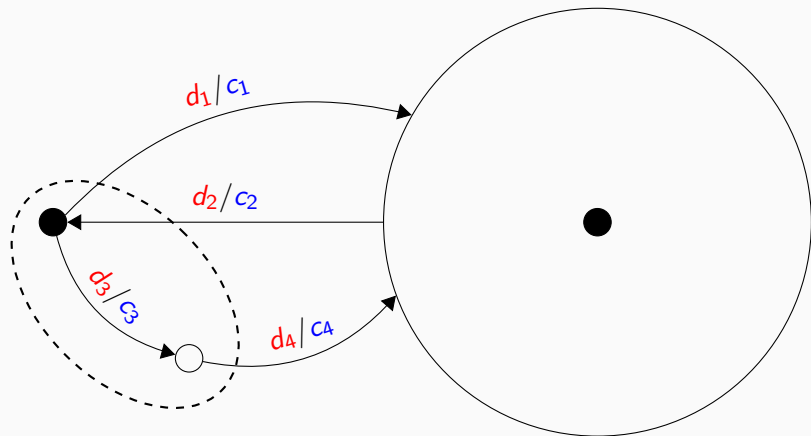
Ce majorant ne permet pas d'affirmer que le flot est maximal

# Vers d'autres majorants



Flot :  $d_1 - d_2 + d_3$

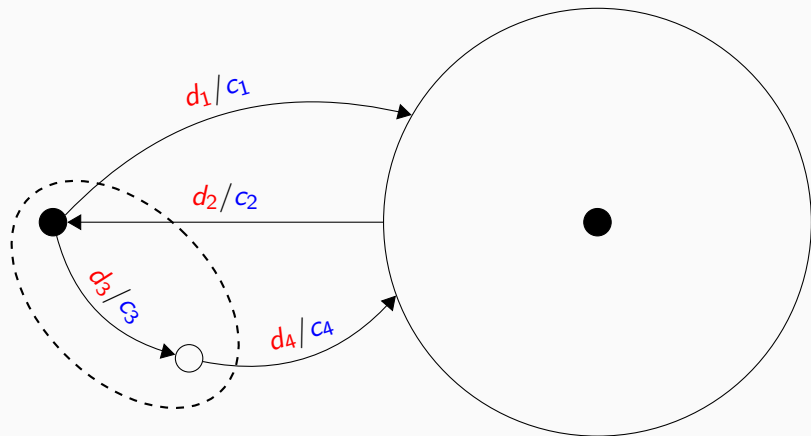
# Vers d'autres majorants



Flot :  $d_1 - d_2 + d_3$

Conservation du débit :  $d_3 = d_4$

## Vers d'autres majorants

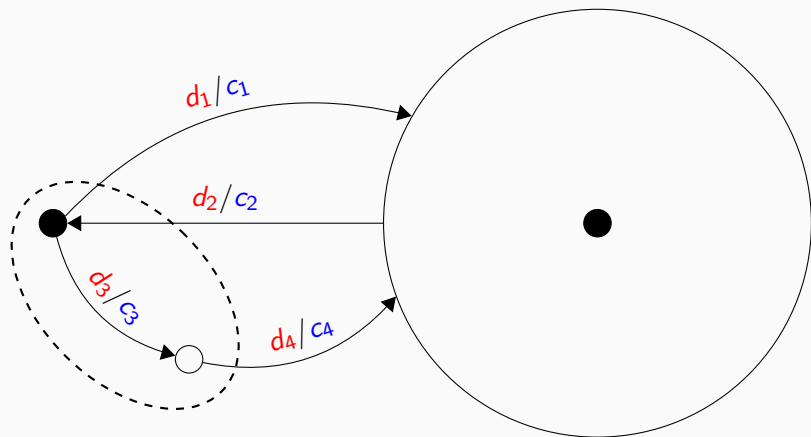


Flot :  $d_1 - d_2 + d_3$

Conservation du débit :  $d_3 = d_4$

Flot :  $d_1 - d_2 + d_4$

# Vers d'autres majorants

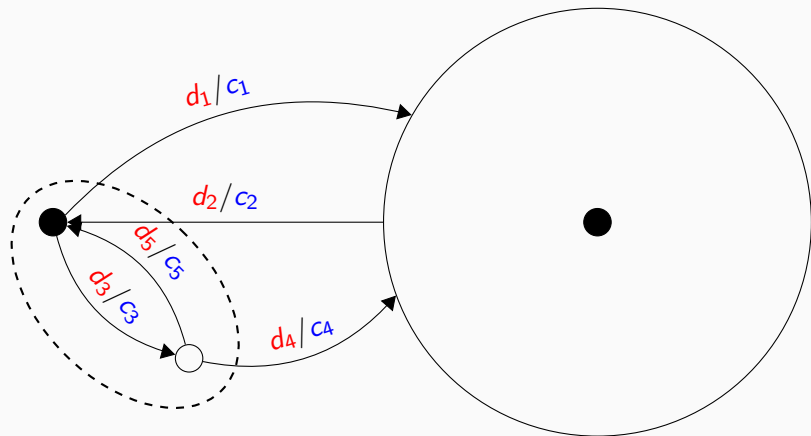


Flot :  $d_1 - d_2 + d_3$

Conservation du débit :  $d_3 = d_4$

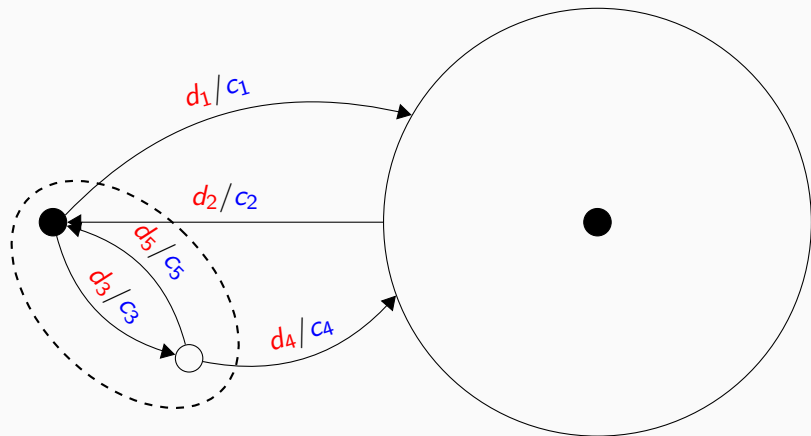
Flot :  $\underbrace{d_1}_{\leq c_1} - \underbrace{d_2}_{\geq 0} + \underbrace{d_4}_{\leq c_4} \leq c_1 + 0 + c_4$

# Vers d'autres majorants



Flot :  $d_1 - d_2 + d_3 - d_5$

# Vers d'autres majorants

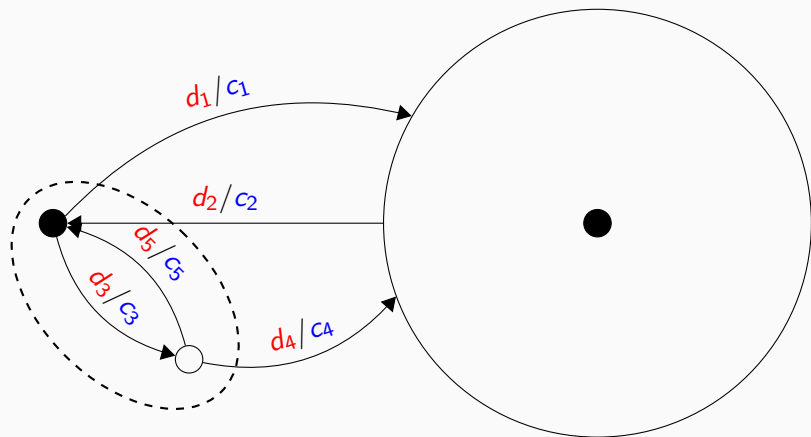


Flot :  $d_1 - d_2 + d_3 - d_5$

Conservation du débit :  $d_3 - d_5 = d_4$



## Vers d'autres majorants

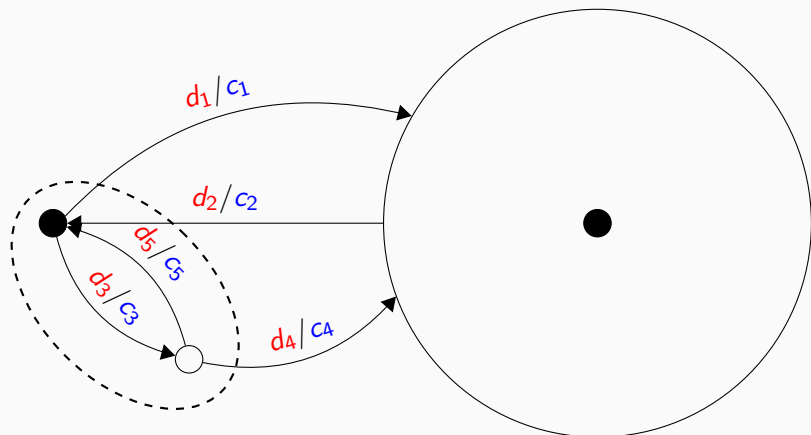


Flot :  $d_1 - d_2 + d_3 - d_5$

Conservation du débit :  $d_3 - d_5 = d_4$

Flot :  $d_1 - d_2 + d_4$

# Vers d'autres majorants

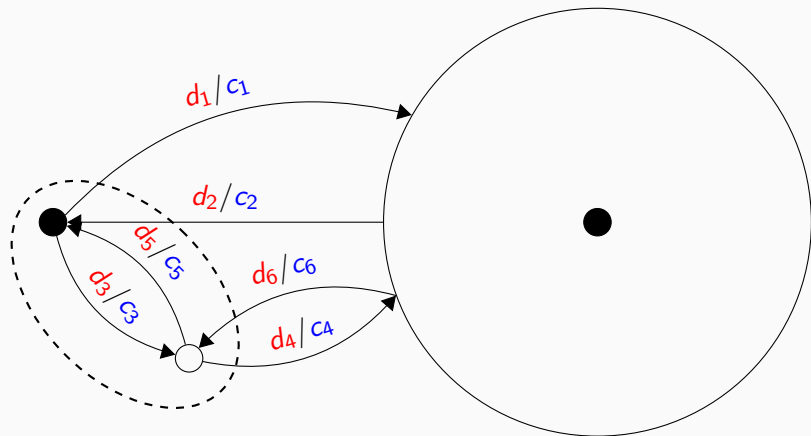


$$\text{Flot : } d_1 - d_2 + d_3 - d_5$$

$$\text{Conservation du débit : } d_3 - d_5 = d_4$$

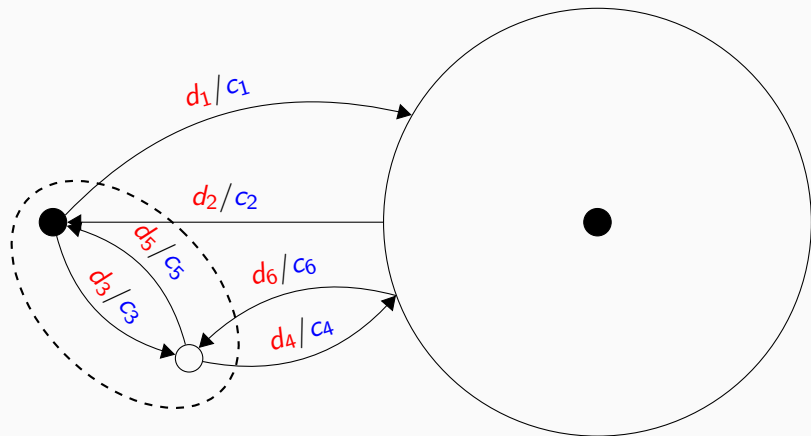
$$\text{Flot : } \underbrace{d_1}_{\leq c_1} - \underbrace{d_2}_{\geq 0} + \underbrace{d_4}_{\leq c_4} \leq c_1 + 0 + c_4$$

# Vers d'autres majorants



Flot :  $d_1 - d_2 + d_3 - d_5$

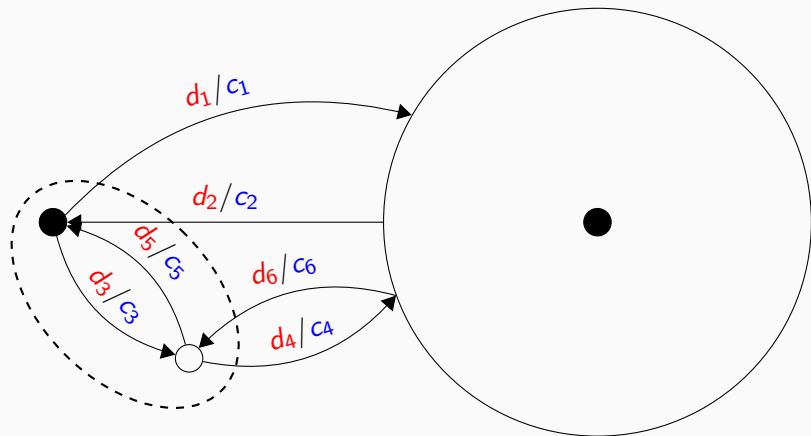
# Vers d'autres majorants



Flot :  $d_1 - d_2 + d_3 - d_5$

Conservation du débit :  $d_3 - d_5 = d_4 - d_6$

## Vers d'autres majorants

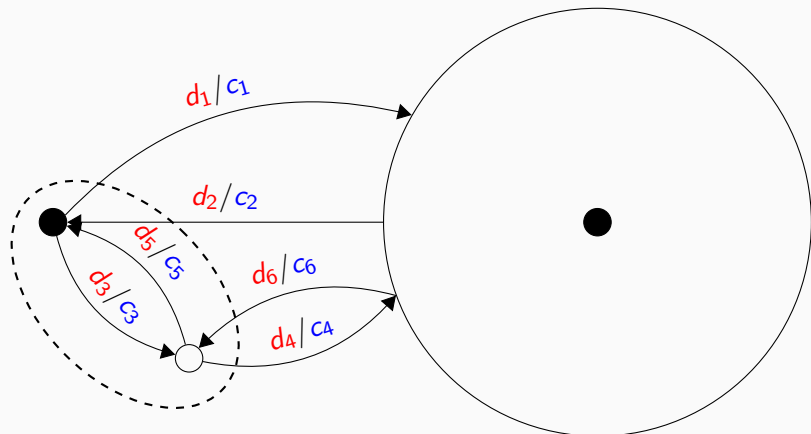


Flot :  $d_1 - d_2 + d_3 - d_5$

Conservation du débit :  $d_3 - d_5 = d_4 - d_6$

Flot :  $d_1 - d_2 + d_4 - d_6$

# Vers d'autres majorants

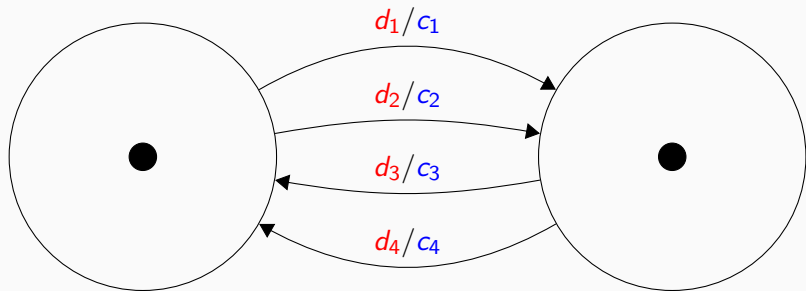


$$\text{Flot : } d_1 - d_2 + d_3 - d_5$$

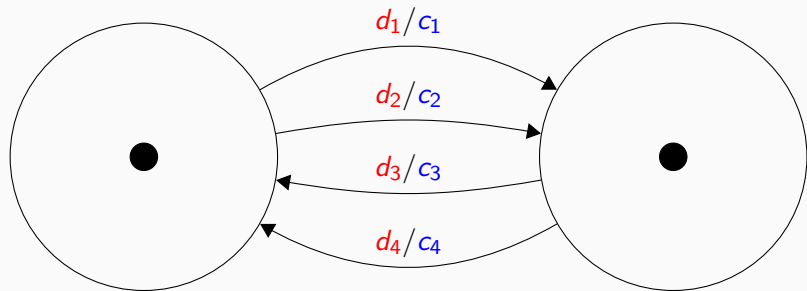
$$\text{Conservation du débit : } d_3 - d_5 = d_4 - d_6$$

$$\text{Flot : } \underbrace{d_1}_{\leq c_1} - \underbrace{d_2}_{\geq 0} + \underbrace{d_4}_{\leq c_4} - \underbrace{d_6}_{\geq 0} \leq c_1 + 0 + c_4 + 0$$

# Vers d'autres majorants



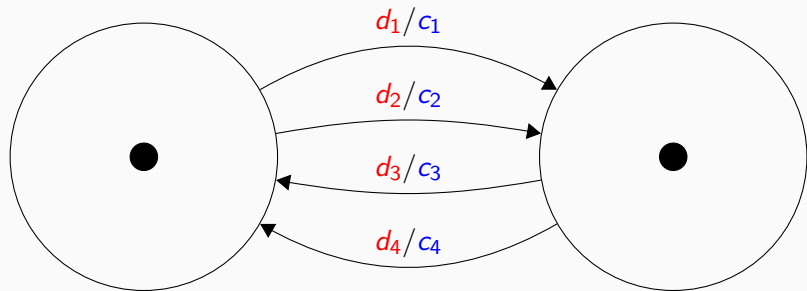
# Vers d'autres majorants



Flot :  $d_1 + d_2 - d_3 - d_4$



# Vers d'autres majorants



$$\text{Flot : } \underbrace{d_1}_{\leq c_1} + \underbrace{d_2}_{\leq c_2} - \underbrace{d_3}_{\geq 0} - \underbrace{d_4}_{\geq 0} \leq c_1 + c_2 + 0 + 0$$

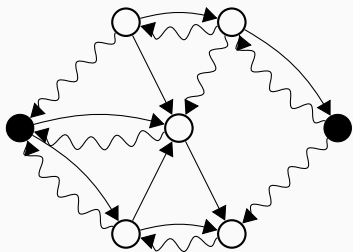
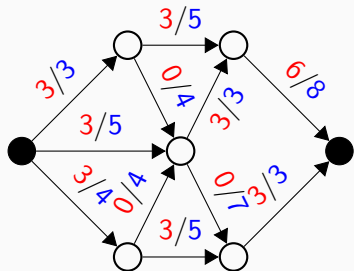
## Conditions pour que ce majorant soit égal au flot

## Conditions pour que ce majorant soit égal au flot

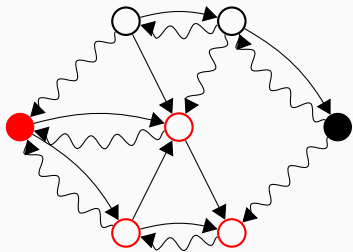
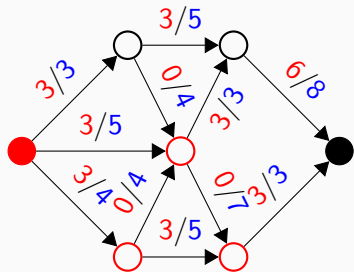
Les débits des tuyaux  $\rightarrow$  sont égaux à leur capacité

Les débits des tuyaux  $\leftarrow$  valent 0

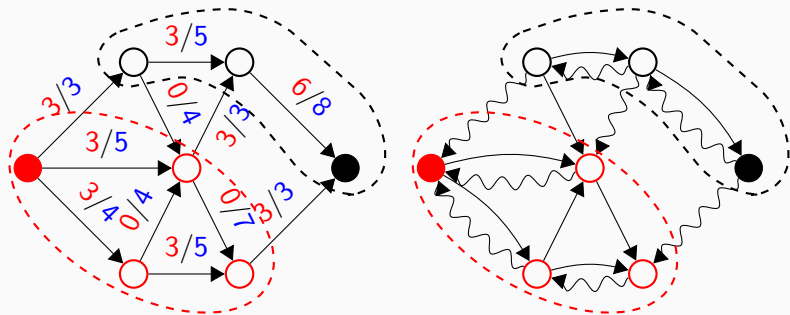
# Une séparation des points qui prouve la maximalité



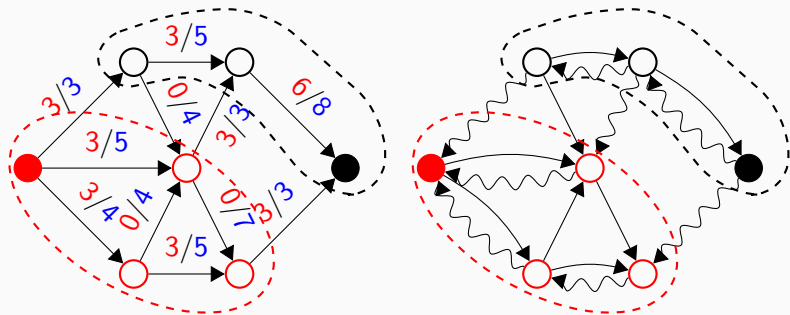
# Une séparation des points qui prouve la maximalité



# Une séparation des points qui prouve la maximalité

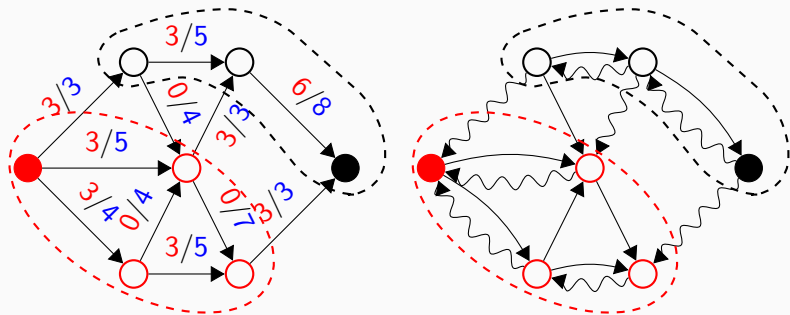


# Une séparation des points qui prouve la maximalité



Pas de  $\longrightarrow$  : les débits des tuyaux sortants valent leur capacité

# Une séparation des points qui prouve la maximalité



Pas de  $\longrightarrow$  : les débits des tuyaux sortants valent leur capacité

Pas de  $\rightsquigarrow$  : les débits des tuyaux entrants sont égaux à 0



# Récapitulatif

- ▶ On part d'un flot nul
- ▶ Tant qu'il existe un chemin augmentant, on l'augmente
- ▶ Quand il n'y a plus de chemin augmentant, on a une séparation des points qui prouve que le flot est maximal

# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

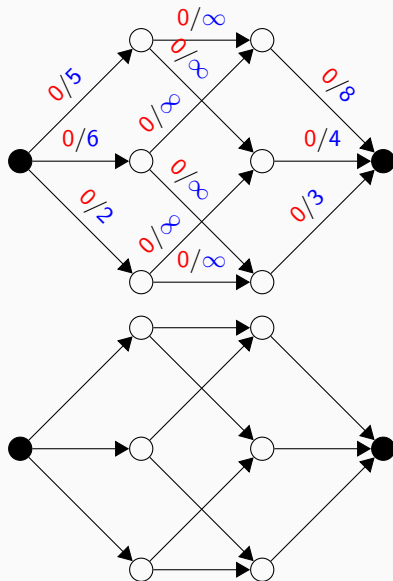
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	0-0	0-0	0-0



# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

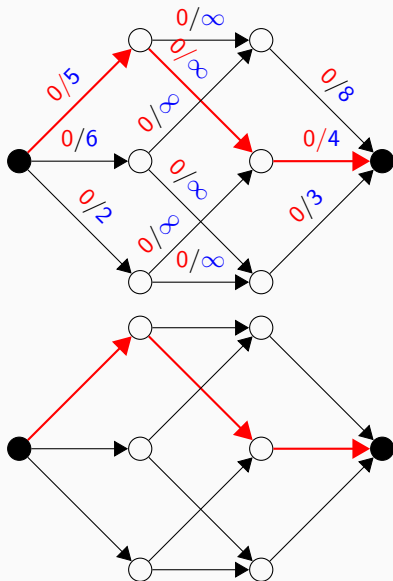
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	0-0	0-0	0-0



# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

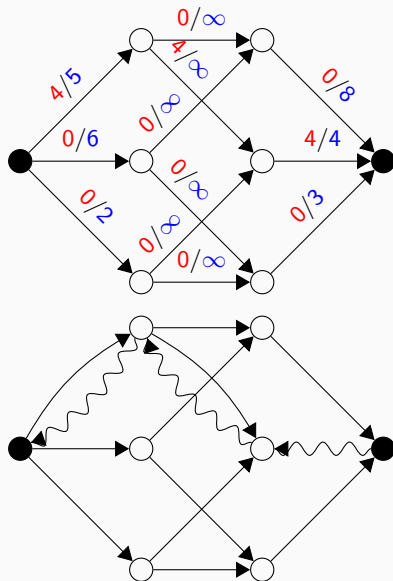
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	0-4	0-0	0-0



# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

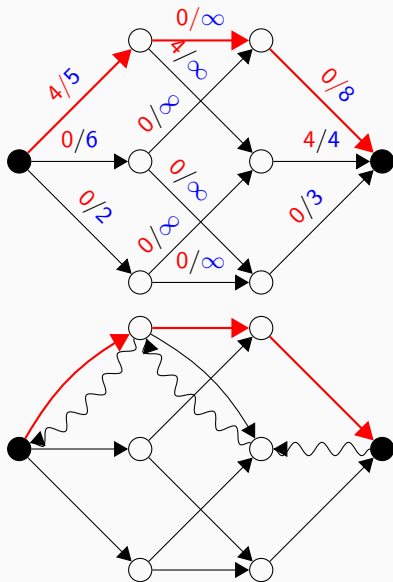
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	0-4	0-0	0-0



# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

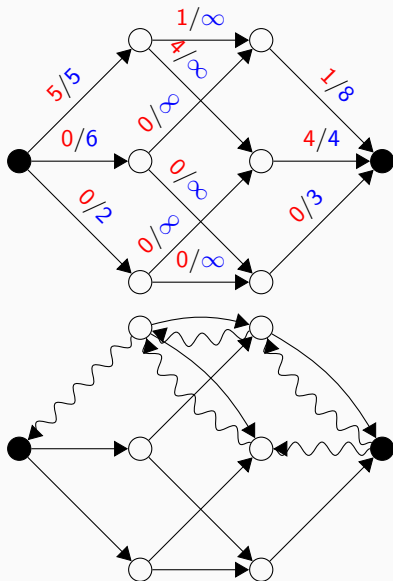
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	1-4	0-0	0-0



# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

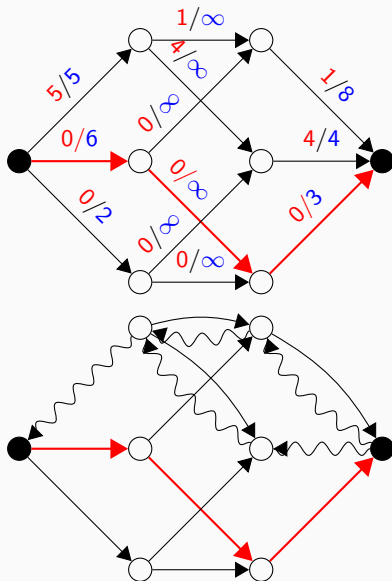
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	1-4	0-0	0-0



# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

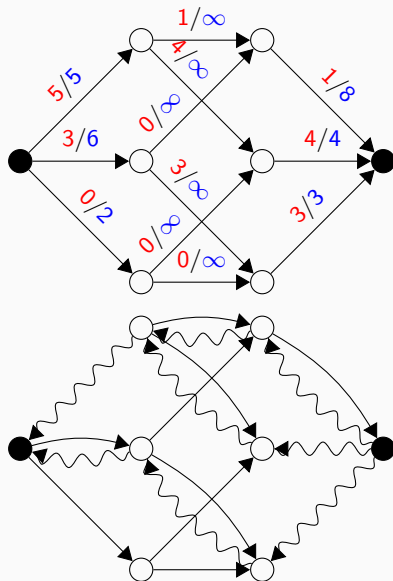
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	1-4	0-3	0-0





# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

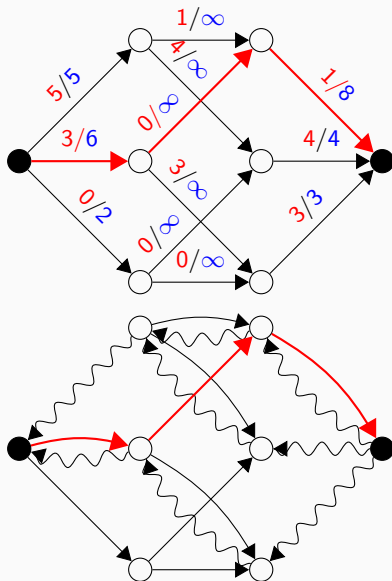
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	1-4	0-3	0-0



# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

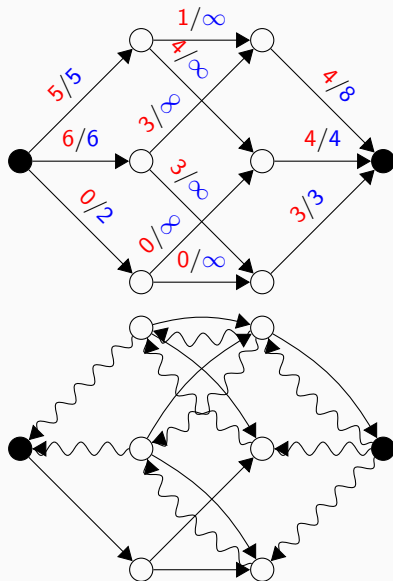
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	1-4	3-3	0-0



# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

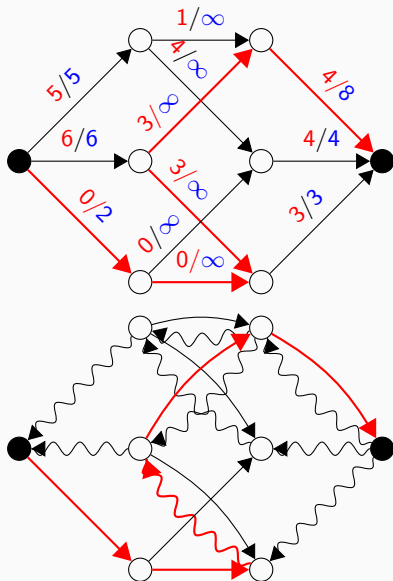
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	1-4	3-3	0-0



# L'algorithme final

Nombre de matchs gagnés :

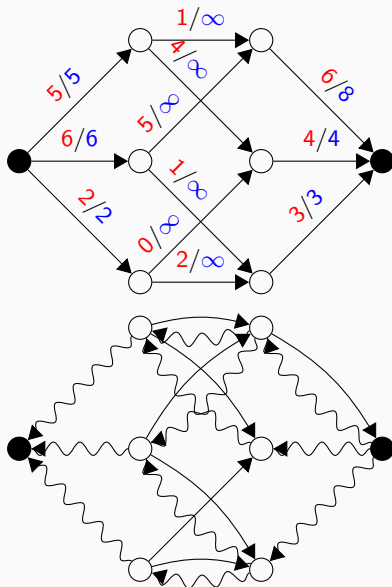
Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
Victoires	9	1	5	6

Nombre de matchs à jouer :

Équipe	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
$e_1$	-	-	-	-
$e_2$	-	-	5	6
$e_3$	-	-	-	2
$e_4$	-	-	-	-

Valeur des  $v_{i,j}$

Match	$e_2 - e_3$	$e_2 - e_4$	$e_3 - e_4$
Victoires	1-4	5-1	0-2



Combien d'opérations fait l'algorithme ?

Combien d'opérations fait l'algorithme ?

nombre fois qu'on  $\times$  nombre d'opérations pour  
augmente un chemin trouver un chemin augmentant

Combien d'opérations fait l'algorithme ?

nombre fois qu'on augmente un chemin  $\times$  nombre d'opérations pour trouver un chemin augmentant

$\leq$  valeur du flot maximal  $\times$  taille du graphe

Combien d'opérations fait l'algorithme ?

nombre fois qu'on augmente un chemin  $\times$  nombre d'opérations pour trouver un chemin augmentant

$\leq$  valeur du flot maximal  $\times$  taille du graphe

$\leq$  190  $\times$  34



# Performance

Combien d'opérations fait l'algorithme ?

nombre fois qu'on augmente un chemin  $\times$  nombre d'opérations pour trouver un chemin augmentant

$\leq$  valeur du flot maximal  $\times$  taille du graphe

$\leq$  190  $\times$  34

Ça fait 6460 opérations !

Combien d'opérations fait l'algorithme ?

nombre fois qu'on augmente un chemin  $\times$  nombre d'opérations pour trouver un chemin augmentant

$\leq$  valeur du flot maximal  $\times$  taille du graphe

$\leq$  190  $\times$  34

Ça fait 6460 opérations !

À  $10^6$  opérations par seconde, le problème est résolu en 6 millisecondes.

## Conclusion/Ouverture

# Conclusion

# Conclusion

- ▶ On a trouvé un algorithme rapide pour résoudre notre problème!

# Conclusion

- ▶ On a trouvé un algorithme rapide pour résoudre notre problème!
- ▶ On a vu comment résoudre le problème du flot maximum

# Conclusion

- ▶ On a trouvé un algorithme rapide pour résoudre notre problème!
- ▶ On a vu comment résoudre le problème du flot maximum

À propos du problème de flot maximum :

# Conclusion

- ▶ On a trouvé un algorithme rapide pour résoudre notre problème!
- ▶ On a vu comment résoudre le problème du flot maximum

À propos du problème de flot maximum :

- ▶ Il existe des algorithmes plus rapides pour le résoudre



# Conclusion

- ▶ On a trouvé un algorithme rapide pour résoudre notre problème!
- ▶ On a vu comment résoudre le problème du flot maximum

À propos du problème de flot maximum :

- ▶ Il existe des algorithmes plus rapides pour le résoudre
- ▶ Il permet de résoudre plein d'autres problèmes en informatique!

# Conclusion

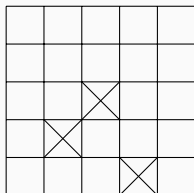
- ▶ On a trouvé un algorithme rapide pour résoudre notre problème !
- ▶ On a vu comment résoudre le problème du flot maximum

À propos du problème de flot maximum :

- ▶ Il existe des algorithmes plus rapides pour le résoudre
- ▶ Il permet de résoudre plein d'autres problèmes en informatique !
- ▶ La preuve de correction de l'algorithme permet de démontrer des théorèmes mathématiques

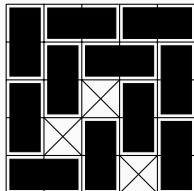
# Un autre problème qui se ramène à un flot maximal

Peut-on recouvrir une grille avec des trous en utilisant des dominos ?

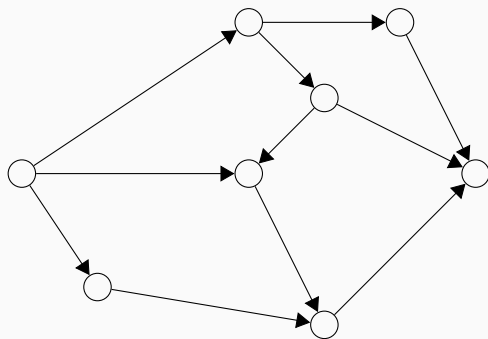


# Un autre problème qui se ramène à un flot maximal

Peut-on recouvrir une grille avec des trous en utilisant des dominos ?

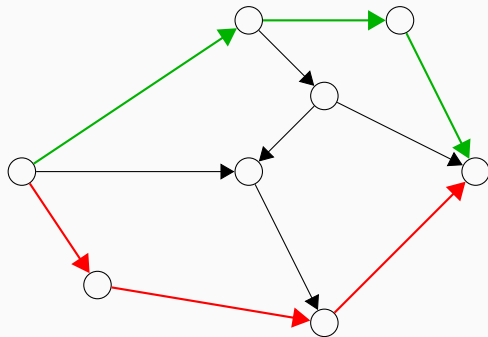


# Théorème de Menger (1927)



# Théorème de Menger (1927)

Nombre max de chemins disjoints entre deux points



# Théorème de Menger (1927)

Nombre max de chemins disjoints entre deux points  
= nombre min d'arête à enlever pour les séparer

